

Disponible en www.hormigonyacero.com
Hormigón y Acero, 2024
<https://doi.org/10.33586/hya.2024.3142>

ARTÍCULO EN AVANCE ON LINE

Formulación analítica para el cálculo de tableros bijácena con solicitación excéntrica

Javier Henche Blanco

DOI: <https://doi.org/10.33586/hya.2024.3142>

Para ser publicado en: *Hormigón y Acero*

Por favor, el presente artículo debe ser citado así:

Henche, J. (2024) Formulación analítica para el cálculo de tableros bijácena con solicitación excéntrica, *Hormigón y Acero*. <https://doi.org/10.33586/hya.2024.3142>

Este es un archivo PDF de un artículo que ha sido objeto de mejoras propuestas por dos revisores después de la aceptación, como la adición de esta página de portada y metadatos, y el formato para su legibilidad, pero todavía no es la versión definitiva del artículo. Esta versión será sometida a un trabajo editorial adicional, y una revisión más antes de ser publicado en su formato final, pero presentamos esta versión para adelantar su disponibilidad.

En el proceso editorial y de producción posterior pueden producirse pequeñas modificaciones en su contenido.

© 2024 Publicado por CINTER Divulgación Técnica para la Asociación Española de Ingeniería Estructural, ACHE

Formulación analítica para el cálculo de tableros bijácena con solicitación excéntrica

Analytical formulation for the calculation of bi-girder decks with eccentric loading

Javier Henche Blanco (*)

GRAHEN INGENIEROS SL. Madrid. Spain

Autor para correspondencia (*)

Correo electrónico: javier.henche@grahen.es

PALABRAS CLAVE: Tablero bijácena, viga artesa, función de Green, solicitación excéntrica.

RESUMEN

Se presenta un planteamiento analítico para la obtención de las deformaciones y solicitaciones en tableros con vigas gemelas, en especial los obtenidos a partir de secciones prefabricadas en artesa. Fue de inspiración y fundamento la fuerza de la descomposición de la función resistente en estados más simples, para la obtención de una formulación matemática. Se trata de una forma similar al planteamiento que realizó Javier Manterola en el memorable artículo “La sección abierta y cerrada bajo solicitación excéntrica” [1]. Para la resolución se efectuará una aproximación al formalismo matemático de las funciones de Green. El planteamiento requiere una serie de simplificaciones admisibles que aproximan con bastante rigor la solución, y permiten la evaluación directa de la acción de cargas móviles. Por último, se efectúa un análisis de la efectividad del reparto transversal conseguido con diversas condiciones de apoyo.

ABSTRACT

This paper presents an analytical approach to determine the deformations and stresses in twin beam decks, commonly used with channel-shaped precast beams. The method is inspired by and founded on the efficiency of load decomposition into simpler cases and provides a mathematical framework to address the problem. This approach builds on the significant work of Javier Manterola in 'The open and closed section under eccentric loads' [1]. The resolution involves applying the mathematical formalism of Green's functions. The analysis incorporates a set of admissible simplifications that yield a fairly rigorous approximation of the solution, enabling the direct evaluation of the effects of moving loads. Finally, the paper examines the effectiveness of transverse load distribution achieved under various support conditions.

1.- INTRODUCCIÓN

Siempre tuvimos presente la referencia [1] de Don Javier Manterola “*La sección abierta y cerrada bajo solicitación excéntrica*”, acerca de cómo se podría extender la teoría de vigas, cuando, bajo ciertas condiciones, un tablero de puente se puede asimilar a un elemento lineal. Era sorprendente la elegancia del desarrollo matemático, para condensar, en unas ecuaciones diferenciales formalmente bastante simples, toda la complejidad de la solicitación excéntrica. Una de las lecciones más importantes que se aprenden allí, tal como nuestro maestro intentó transmitirnos en sus clases, es la potencia de la descomposición del problema en una superposición de estados más simples, como son la torsión, la distorsión y los alabeos ligados a ellas, que a su vez son muy útiles para entender mejor la función resistente completa. Antes de la llegada del desarrollo generalizado del método de elementos finitos (MEF) para el cálculo de los tableros, fueron importantes las

herramientas analíticas, que poseen una magnífica exposición y rigor en los trabajos de Don Avelino Samartin, en especial de las recopilaciones recogidas en [2] y [3]. Como referencia más reciente, mencionamos los importantes trabajos de Don Salvador Monleón y el equipo de la Universidad Politécnica de Valencia (UPV) referencias [4] y [5], que, a partir de métodos variacionales, alcanzan el mismo objetivo para cualquier directriz de viga.

Lo que aquí se presenta, pretende ser una pequeña aportación para la solución del mismo problema para un caso particular pero muy útil: obtener la solución analítica para el cálculo de deformaciones y solicitaciones en puentes con doble viga con carga excéntrica. Esta tipología es ampliamente utilizada, correspondiendo el caso más frecuente, a dos vigas principales prefabricadas de hormigón con sección en artesa y una losa de reparto. Para puentes estrechos, es posible utilizar una pareja de vigas prefabricadas de ala ancha; también se aplica a tableros mixtos con vigas metálicas armadas, con diversas configuraciones. Toda esta familia de tableros pueden englobarse en la denominación general de tableros bijácena.

En el presente artículo, partiendo de unas simplificaciones razonables del problema general, se consigue establecer unas ecuaciones diferenciales que rigen el reparto transversal de la carga excéntrica entre ambas vigas. Mediante el formalismo de la función de Green que la resuelve, es posible calcular las solicitaciones y las deformaciones, ante la aplicación de cualquier clase de sobrecarga sobre el tablero, ya sean ferroviaria o de carretera. Una referencia interesante para profundizar en el fundamento matemático utilizado se señala en [6]; es oportuno señalar que, de forma indirecta y poco conocida, los formularios clásicos de solicitaciones de vigas con cargas puntuales, son soluciones de la función de Green de la ecuación diferencial de la viga de Bernouilli – Navier, bajo las diversas condiciones de contorno.

Consideramos que el planteamiento es útil para el estudio de tableros ferroviarios de doble vía, con anchos los habituales entre 12.50 y 14.0m para vía convencional o LAV, para lo cual presentamos al final un ejemplo de aplicación.

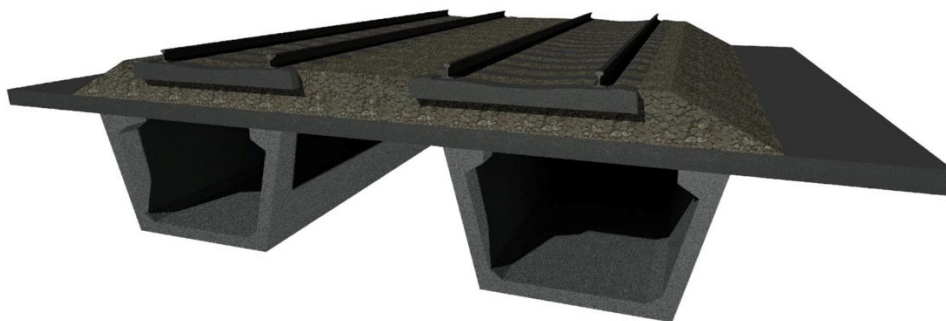


Figura 1: Configuración tipo del tablero de puente FFCC

2.- CONSIDERACIONES INICIALES

Para la obtención de una solución analítica, algunas restricciones y simplificaciones deben ser aplicadas. Al final se hará mención a la extensión a puentes continuos o de apoyo oblicuo, y con losa de reparto con rigidez torsional. Las hipótesis requeridas son las siguientes:

1. Son tableros de sección constante, con dos vigas principales paralelas e iguales. Ello es obligado al utilizar en las ecuaciones las condiciones de simetría de eje central longitudinal.
2. La sección transversal de la viga posee la rigidez propia de torsión de Saint Venant (como sección abierta o cerrada).
3. No se considera ni el alabeo torsional ni la distorsión de la sección individual de viga, lo cual es válido de acuerdo a las dimensiones y formas habituales.

4. La vinculación transversal entre las vigas la proporciona únicamente la losa de reparto. Las cargas aplicadas sobre ella, se transmiten únicamente por flexión transversal a las vigas.
5. Las vigas se encuentran simplemente apoyadas en ambos extremos. Se estudiarán los casos de vigas con giro de torsión impedido -por riostra transversal o disposición de doble apoyo, más habitual en puentes ferroviarios-; y giro libre solo coaccionado por la losa de reparto. Este último caso es bastante habitual en puentes de carretera, al disponerse uno único con riostra propia en centro de la viga prefabricada.
6. Se considera como eje X el longitudinal de viga, el eje Y vertical hacia arriba, y el Z horizontal transversal, con triedro directo, para fuerzas y deformaciones. Como signo de solicitaciones, se considerarán positivas las correspondientes a las positivas en la cara frontal de la sección; y el de deformaciones, las positivas según ejes globales. Ello implica que algunas las fórmulas habituales de la teoría elemental de vigas cambien de signo, quedando por ejemplo:

$$q(x) = -\frac{dV(x)}{dx} ; V(x) = -\frac{dM(x)}{dx} ; M(x) = -EI \cdot \frac{dw(x)}{dx} ; w(x) = -\frac{du(x)}{dx}$$

Siendo aquí la nomenclatura de acciones y solicitaciones de viga en flexión que luego utilizaremos:

- $q(x)$: Ley de carga vertical
- $u(x)$ y $w(x)$: Deformación vertical y giro de flexión de viga.
- $M(x)$ y $V(x)$: Solicitaciones de flexión y cortante de viga.

Estas condiciones permiten abordar analíticamente el estudio de tableros sencillos, y obtener de forma directa su cálculo con gran aproximación.

3.- TRANSFORMACIÓN DEL TABLERO REAL AL MODELO ANALÍTICO

Previamente al establecimiento de las ecuaciones constitutivas, se requiere transformar la sección real a la de cálculo, de acuerdo a la siguiente descomposición:

- 1) Se considera cada viga referida a sus ejes longitudinales (X) propios que pasan por su CDG, y con una separación (S) entre ellos.
- 2) La losa reparte transversalmente. Para obtener las reacciones sobre cada viga, se considera la losa como viga continua en sentido transversal, suponiendo fijos los apoyos sobre las almas.
- 3) Las reacciones locales se transmitirán en sentido longitudinal, generándose distribuciones de acciones $P_{v1}(x)$, $M_{v1}(x)$, $P_{v2}(x)$ y $M_{v2}(x)$, de acuerdo al siguiente método:
 - **En el caso de vigas artesa**, se materializa un apoyo en cada alma de viga. De esta forma, se obtienen dos reacciones por viga.

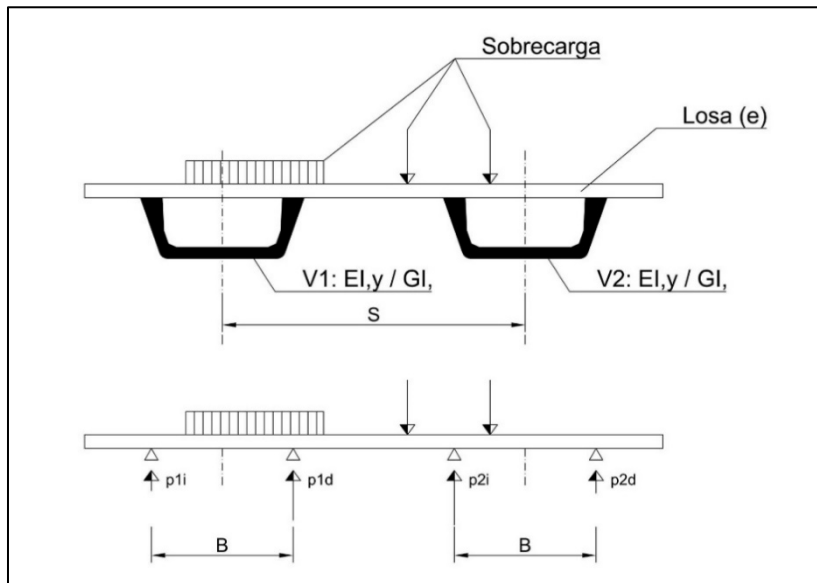


Figura 2: Obtención de reacciones unitarias en almas de vigas artesa

Llamando B a la separación entre almas de vigas, se obtienen los valores de las reacciones equivalentes en eje de viga, en término de carga vertical y momento de eje viga:

$$P_{v1} = p_{1i} + p_{1d} \quad M_{v1} = (p_{1d} - p_{1i}) \cdot B/2$$

$$P_{v2} = p_{2i} + p_{2d} \quad M_{v2} = (p_{2d} - p_{2i}) \cdot B/2$$

- **En caso de vigas de alma única** se obtiene la reacción y el momento de las sobrecargas, de forma directa, considerando los puntos de apoyo en ejes de vigas como empotramientos perfectos.

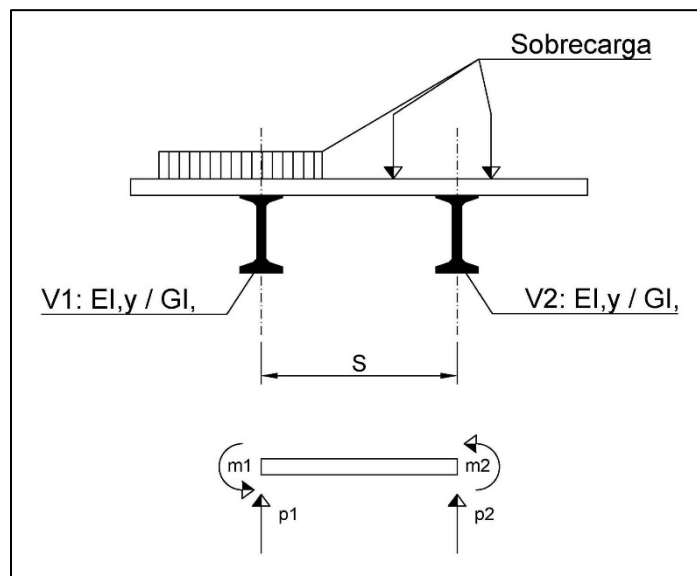


Figura 3: Obtención de reacciones unitarias en el almas de vigas doble T

4) Con estos cuatro valores, se calculan cuatro estados de carga:

- a) Carga vertical simétrica, abordada por teoría elemental de vigas -y por tanto sin reparto transversal- con acciones iguales a:

$$q_{,sim} = (P_{v1} + P_{v2}) / 2$$

- b) Carga vertical antimétrica, igual y de signo contrario en cada viga, para la cual se obtendrá la solución analítica de la función de reparto (Apartado 4º)

$$q_{,ant} = (P_{v1} - P_{v2}) / 2$$

- c) Momento de torsión simétrico – igual y de signo contrario en cada viga- que no provoca flexión en las vigas, solo reparto de torsión, que se estudiará analíticamente.

$$mt_{,sim} = (M_{v2} - M_{v1}) / 2$$

- d) Momento de torsión antimétrico – de mismo signo en ambas vigas- que induce flexión y reparto de torsión (Apartado 5º)

$$mt_{,ant} = (M_{v2} + M_{v1}) / 2$$

Una vez obtenidas las solicitaciones de cada modelo analítico, la suma de los cuatro estados dará directamente las deformaciones y solicitaciones de las vigas.

- e) Para obtener las solicitaciones en losa, en el caso de vigas artesa, con los resultados compuestos de deformaciones (giro y deformación vertical por vigas), se obtendrán las deformaciones verticales en cada alma. Aplicando un modelo de viga continua con aplicación de las deformaciones impuesta en cada apoyo de alma como asientos verticales, se obtendrán los esfuerzos de flexión y cortante de losa de reparto. Se le añadirán lógicamente los esfuerzos locales entre puntos de apoyo en almas fijas.

El esquema de la descomposición en los cuatro estados es el siguiente:

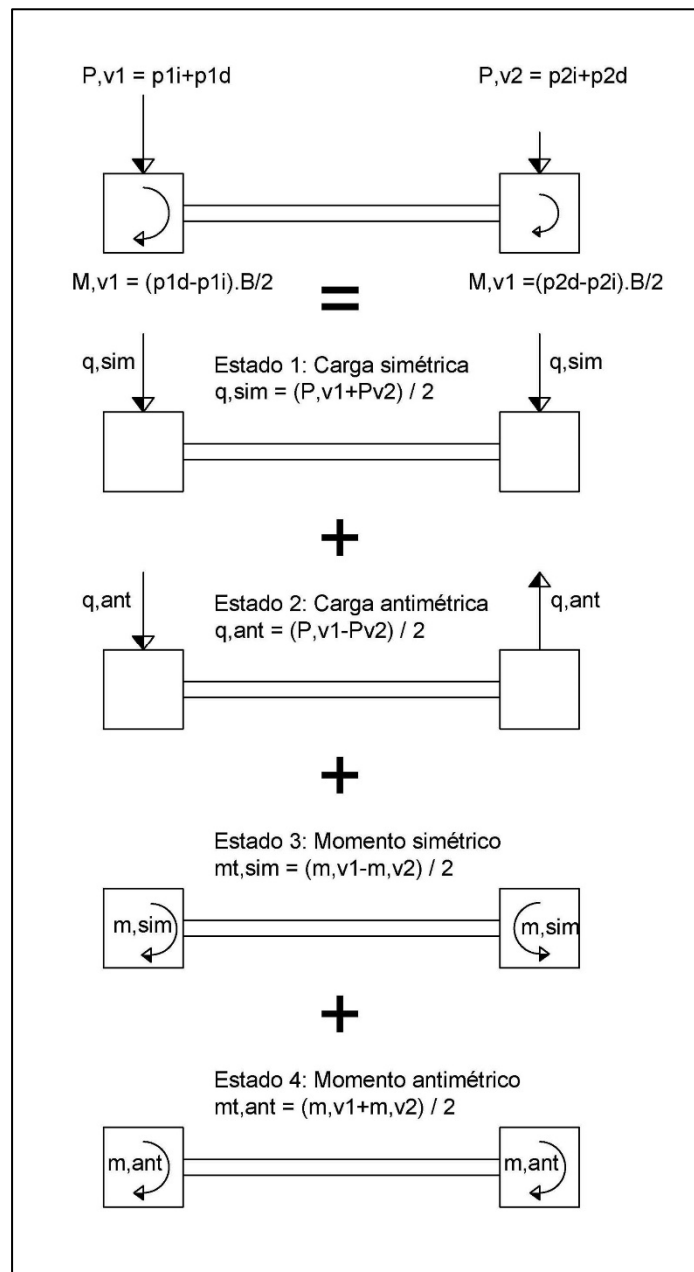


Figura 4: Descomposición de reacciones en unitarias en cuatro estados simples

4.- ESTADO DE APLICACIÓN DE CARGA VERTICAL ANTISIMÉTRICA

El planteamiento de reparto transversal frente a carga vertical antisimétrica pura, se explica en el siguiente esquema, en el cual se establece una acción exterior $q(x)$, en general variable a lo largo de cada viga. El problema trata de obtener la expresión, que definiremos como “función de descarga $p(x)$ ”, a través de la losa, que el sistema distribuye transversalmente. Con el criterio de signos adoptado, posee valor negativo sobre la viga derecha:

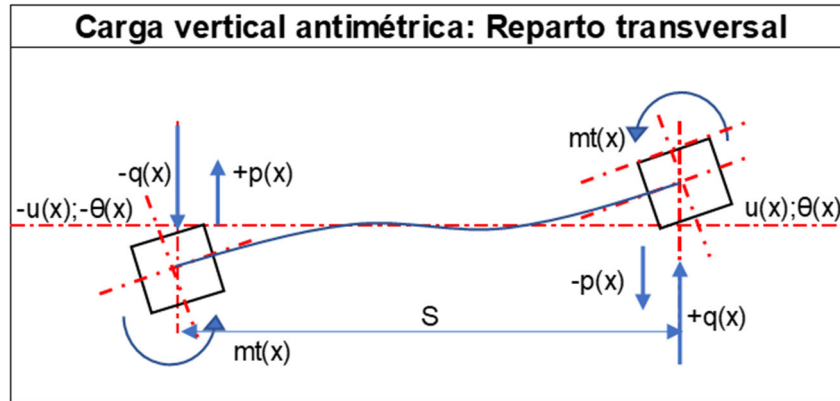


Figura 5: Nomenclatura de acciones, solicitaciones y deformaciones para carga vertical antisimétrica

El resto de variables definidas son:

- $mt(x)$: Momento torsor repartido transmitido por losa por ml.
- $Mt(x)$: Ley de torsión igual en cada viga.
- $\theta(x)$: Giro de torsión igual en cada viga.

Las ecuaciones que rigen las variables anteriores son las siguientes:

1. La primera ecuación es la general de flexión viga Bernoulli, que liga la deformación vertical con la carga neta aplicada que en este caso es la diferencia entre la exterior aplicada (+) y la descargada por reparto transversal (-), suponiendo inercia a flexión constante:

$$q(x) - p(x) = EI u^{IV} \quad (4.1)$$

2. La segunda ecuación liga el giro de torsión con el momento por torsión de Saint Venant en vigas:

$$\frac{Mt(x)}{GI_t} = \theta'(x) \quad (4.2)$$

3. La tercera ecuación liga, a través de los factores de rigidez de la losa, la carga de reparto transversal $p(x)$, y las deformaciones y giros de sus extremos, que son los mismas que los de la vigas:

$$p(x) = 2u(x) \cdot K_{uu} - 2\theta(x) \cdot K_{u\theta} \quad (4.3)$$

Siendo K_{uu} y $K_{u\theta}$ los factores de rigidez de losa, que para espesor constante valen $12EI_{,losa}/S^3$ y $6EI_{,losa}/S^2$

4. La última ecuación es la de equilibrio de losa:

$$mt(x) = -\frac{p(x) \cdot S}{2} \quad (4.4)$$

Con ello, derivando dos veces (4.3) y una vez (4.2):

$$p''(x) = 2u''(x) \cdot K_{uu} - 2\theta''(x) \cdot K_{u\theta} \quad (4.5 - a)$$

$$\frac{mt(x)}{GI, t} = \theta''(x) \quad (4.5 - b)$$

Y sustituyendo en (4.4) y luego en (4.5):

$$\theta''(x) = -\frac{p(x) \cdot S}{2GI, t}$$

$$p''(x) = 2u''(x) \cdot K_{uu} + \frac{p(x) \cdot S}{GI, t} \cdot K_{u\theta}$$

Derivando respecto a x dos veces:

$$p^{IV}(x) = 2u^{IV}(x) \cdot K_{uu} + \frac{p''(x) \cdot S}{GI, t} \cdot K_{u\theta}$$

Sustituyendo en (4.1):

$$p^{IV}(x) - 2(q(x) - p(x)) \cdot \frac{K_{uu}}{EI} - \frac{p''(x) \cdot S}{GI, t} \cdot K_{u\theta} = 0$$

Simplificando, obtenemos la ecuación que rige el reparto transversal:

$$p^{IV}(x) - p''(x) \cdot \frac{K_{u\theta} \cdot S}{GI, t} + p(x) \cdot \frac{2K_{uu}}{EI} = 2 \frac{K_{uu}}{EI} \cdot q(x) \quad (4.6)$$

Que es una ecuación diferencial bicuadrada en p(x) de coeficientes constantes. Efectuando algunas transformaciones y denominando:

$$a = \frac{EI}{2K_{uu}} \quad b = \frac{S \cdot K_{u\theta} \cdot EI}{2K_{uu} \cdot GI, t}$$

$$a \cdot p^{IV}(x) - b \cdot p''(x) + p(x) = q(x)$$

Se obtiene el polinomio característico de cuarto grado que se transforma de una forma sencilla en una de 2º grado:

$$at^4 - bt^2 + 1 = 0$$

Usualmente el valor de b² es muy superior a 4a, con lo cual el discriminante es negativo y las cuatro raíces adoptan los valores de tipo t = (+/-) u (+/-) i.v, siendo los valores de u, y v los siguientes:

$$u = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\sqrt{a} + b}{a}} \quad v = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\sqrt{a} - b}{a}}$$

Transformando las expresiones de variable compleja en funciones trigonométricas, la solución general de la ecuación homogénea, incluyendo las 4 variables de integración A1, A2, A3 y A4, es la siguiente:

$$p(x) = A1 \cdot \text{Cosh}(ux) \cdot \text{Cos}(vx) + A2 \cdot \text{Cosh}(ux) \cdot \text{Sen}(vy) + A3 \cdot \text{Senh}(ux) \cdot \text{Cos}(vx) + A4 \cdot \text{Senh}(ux) \cdot \text{Sen}(vx) \quad (4.7)$$

4.1.- CÁLCULO DE DEFORMACIONES Y SOLICITACIONES EN EL CASO GENERAL

La obtención de la solución de la función $p(x)$ permite obtener todas las solicitaciones y deformaciones de viga, a partir de las derivaciones y cuadraturas propias de la teoría de vigas:

- **La ley de flexión transversal de losa** que es antimétrica, es la ecuación (4.4) que es también la de torsión repartida aplicada en cada viga $m_t(x)$ cambiada de signo.
- **La ley de flectores longitudinales** de vigas se obtiene a partir de las ecuaciones (4.4), y (4.5), con los parámetros a y b definidos anteriormente, y la relación directa entre curvaturas y momentos:

$$M_f(x) = a \cdot p''(x) - b \cdot p(x)$$

- **La ley de cortantes** se obtiene por derivación de la función anterior. En general:

$$V(x) = -a \cdot p'''(x) + b \cdot p'(x) = V(0) + \int_0^x p(x)dx - \int_0^x q(x)dx$$

Particularizando en $X = 0$ y $X = L$ se obtienen las reacciones en los extremos $R_1 = -V(0)$ y $R_2 = +V(L)$. La fórmula anterior también nos permite saber la función primitiva de $p(x)$ directamente, que luego utilizaremos, y denominaremos $P(x)$, sin necesidad de resolver la integral. Siendo obviamente $P(0) = V(0)$, se obtiene:

$$P(x) = P(0) + \int_0^x p(x)dx = V(x) + \int_0^x q(x)dx$$

- **La ley de momentos torsores** en vigas se obtiene por integración de la ley de torsores repartidos según (4.4). Para ello es útil utilizar el valor de la integral obtenido anteriormente.

$$\frac{dM_t(x)}{dx} = m_t(x) = p(x) \cdot \frac{S}{2} \rightarrow M_t(x) = M_t(0) + \frac{S}{2} \cdot [P(x) - P(0)]$$

Las reacciones verticales de apoyo y el equilibrio global determinan el valor del torsor en el extremo. Considerando el valor de $\theta'(x)$, y siendo $Q(x)$ la función primitiva de la ley de cargas exteriores $q(x)$, establecemos la fórmula anterior modificada:

$$GI, t. \theta'(x) = M_t(x) = M_t(0) + \frac{S}{2} \cdot [Q(x) + V(x) - V(0)]$$

- La integración de la ecuación anterior nos permite obtener **la ley de giros de torsión**, estimando las relaciones entre flectores y cortantes. Llamando $QQ(x)$ la primitiva de la función $Q(x)$:

$$\theta(x) = \theta(0) + \frac{M_t(0)}{GI, t} \cdot x + \frac{S}{2 \cdot GI, t} \cdot [QQ(x) - M_f(x) - xV(0)]$$

- A partir de la ecuación (4.3), y con la ley de giros de torsión se obtiene directamente **la ley de flechas**:

$$u(x) = \frac{p(x)}{2K_{uu}} + \theta(x) \frac{K_{u\theta}}{K_{uu}}$$

Las expresiones analíticas generales $p'(x)$, $p''(x)$ y $p'''(x)$, se presentan al final como apartado, incluyendo los valores de las primitivas de $p(x)$ y $P(x)$. Se calculan mediante una integral recurrente a partir de una doble integración por partes.

4.2.- CONDICIONES DE CONTORNO USUALES

El cálculo de la expresión general (4.7) requiere determinar las cuatro variables de integración, de acuerdo a las condiciones de coacción al giro de torsión. Los casos que aquí analizamos, que son los más frecuentes, corresponden a ambos extremos con giro de eje de viga impedido y giro libre; siempre con la condición de vigas apoyadas a flexión. Las condiciones de borde de las funciones analíticas anteriormente presentadas, que se utilizarán para tal fin son las siguientes:

a) **Caso de extremos empotrados a torsión:** Que es el caso más sencillo.

- Por condición de apoyo vertical: $u(0) = u(L) = 0$
- Por giro impedido a torsión: $\theta(0) = \theta(L) = 0$
- Con lo cual de acuerdo a ecuación (4.3): $p(0) = p(L) = 0$
- Por condición de flector nulo en los extremos: $u''(0) = u''(L) = 0$
- Con lo cual de acuerdo a ecuación (4.5): $p''(0) = p''(L) = 0$

Habiendo remarcado las cuatro condiciones de contorno del problema para el caso general.

b) **Caso de extremos libres para el giro de torsión.** Las cuatro condiciones son algo más complicadas. Se parte, al igual que antes de:

- Por condición de apoyo vertical: $u(0) = u(L) = 0$
- Por condición de flector nulo en los extremos $u''(0) = u''(L) = 0$.
- Con lo anterior se verifica que $p''(0) = -2K_{\theta} \cdot \theta''(0)$. Aplicando la ecuación (4.5-b), se obtienen estas dos condiciones, en función de $p(x)$ y su segunda derivada:

$$p''(0) = p(0) \frac{K_{\theta} \cdot S}{GI, t} = p(0) \cdot \frac{b}{a} ; \quad p''(L) = \frac{p(L) \cdot b}{a}$$

- Las otras se obtienen considerando torsión nula en los extremos $M_t(0) = M_t(L) = 0$:
 - Aplicando la relación entre cortante y torsores en el extremo dorsal, y por condiciones de equilibrio general, obteniéndose una 3ª condición:

$$0 = Q(L) + V(L) - V(0)$$

Esto nos dice que, aunque existe una redistribución transversal respecto a los esfuerzos isostáticos, ésta posee balance de suma cero, y por tanto podemos decir "lo que pasa en la viga se queda en la viga" para estados de carga puramente antisimétricos.

- Por otra parte, derivando (4.3) y siendo $\theta'(0) = 0$ por ser nulo el torsor, tenemos la siguiente condición en el extremo dorsal:

$$p'(0) = 2 \cdot u'(0) \cdot K_{uu} \quad (4.8)$$

Es decir, necesitamos obtener una relación entre el del giro de flexión $u'(0)$, y las funciones p y sus derivadas. Para ello se aplica la fórmula que obtiene el giro en extremo de viga biapoyada, en función de la integración del momento estático de la ley de curvaturas (2º Teorema de Mohr):

$$u'(0) \cdot L + \int_0^L (L - x) \cdot u''(x) \cdot dx = 0 \quad (4.9)$$

Conociendo la ley de curvaturas a partir de la ecuación (4.5):

$$\frac{p''(x)}{2K_{uu}} - \frac{p(x) \cdot S}{2GI, tK_{uu}} \cdot K_{u\theta} = u''(x)$$

Con lo cual debemos calcular las integrales de $p''(x) \cdot (L-x)$ y $p(x) \cdot (L-x)$ para obtener la función de curvaturas. Integrando por partes y con alguna manipulación sencilla se obtiene:

$$\int_0^L (L-x) \cdot p(x) \cdot dx = (L-y) \cdot Q - P(0) \cdot L$$

$$\int_0^L (L-x) \cdot p''(x) \cdot dx = -L \cdot p'(0) + p(L) - p(0)$$

Siendo $P(0) = V(0)$ el valor función primitiva de $p(x)$ en el origen. Aplicando las fórmulas anteriores en (4.8) y (4.9) y despejando. se obtiene la cuarta condición de contorno:

$$-p(L) + p(0) - K_1 \cdot L \cdot P(0) = -K_1 \cdot (L-y) \cdot Q$$

Siendo

$$K_1 = \frac{K_{u\theta} \cdot S}{GI_t}$$

En ambos casos, para condiciones de carga simétrica estas expresiones se simplifican notablemente, ya que la función de descarga $p(x)$ también será simétrica, y solo requiere dos coeficientes a determinar por las condiciones anteriores en sus extremos, siempre que se considere el origen del eje X en el centro de la viga.

4.3.- CASO DE CARGA LOCAL: FUNCIÓN DE GREEN

Es muy importante el caso en que la carga exterior es puntual ($Q(y)$ aplicada en coordenada y), siendo entonces $q(x) = Q \cdot \delta(x-y)$ siendo δ la función delta de Dirac. Se abre la posibilidad de aplicar el formalismo de funciones de Green para encontrar soluciones generales. En realidad los formularios de solicitaciones y deformaciones de vigas para carga puntual, son las funciones de Green $G(X,Y)$ de doble variable: X la coordenada de viga e Y la posición de la carga. De hecho, el teorema de reciprocidad de Betti – Maxwell, es un corolario de la simetría en X e Y de la función de Green, al tratarse de un operador lineal. Si se conoce dicha función, para cualquier distribución de la carga exterior $q(x)$, la solución puede obtenerse a partir de la fórmula siguiente

$$p(x) = \int_0^x G(x,y) \cdot q(y) \cdot dy$$

El planeamiento operativo pasa por obtener numéricamente la función $G(x,y)$, y efectuar también numéricamente la integración. Otra propiedad útil es que si el funcional corresponde a un tipo

$$L[H(p(x))] = \delta(x-y)$$

Siendo L y H dos operadores diferenciales lineales, la función de Green será el producto de las funciones individuales de cada operador. Esto se verifica en nuestro caso, ya que la ecuación (4.6) se puede considerar la aplicación sucesiva de los operadores $L = (k'' - k)$ y $H = (k'' + k)$. La solución de cada una consta de dos términos de funciones trigonométricas ordinarias e hiperbólicas cuyo producto da la solución general (4.7).

El teorema de existencia considera que, si para condiciones de carga nula y de contorno homogéneas, no existe solución diferente de la trivial -lo cual se verifica siempre en estructuras elásticas-, existirá función de Green, y será formalmente similar a la expresada en (4.7), siendo los coeficientes (A_i) indeterminados, funciones de la posición de la carga (y). Para el caso de carga puntual -y en general la solución de función $G(x,y)$ -, se establecen dos funciones a derecha e izquierda de la coordenada (y) de aplicación, siendo los cuatro coeficientes diferentes antes y después de la carga aplicada. Denominaremos A_1 a A_4 los aplicables por el lado izquierdo, y B_1 a B_4 a los del lado derecho de la viga, en relación al punto de aplicación. Hay por tanto 8 incógnitas a determinar en función de las condiciones de contorno y continuidad, de las cuales las cuatro primeras -valores de contorno- ya se han obtenido en el apartado anterior.

Las otras cuatro son las **condiciones de continuidad en el punto de aplicación de la acción**, que consisten en la propia continuidad de la función, y de sus dos primeras derivadas en la coordenada (y); la cuarta asigna valor del “salto” en ley de tercera derivada igual a $-Q/a$. La particularización de estos criterios a los resultados de solicitaciones y deformaciones es la siguiente:

- Las funciones $M_f(x)$ y $V(x)$ son diferentes para $x < y$ $x > y$, siendo continua para $x = y$ en el primer caso, y con salto de valor Q en el segundo. Esto es consecuencia de tratarse de la segunda y tercera derivada respectivamente de la función de descarga. Se obtienen por derivación según fórmulas (4.8) y (4.9).
- La integral de la función primitiva de $p(x)$ se transforma en $Q \cdot H(x-y)$, siendo la función escalón de Heaviside en el punto de aplicación de la carga:

$$P(x) = V(x) + H(x - y)$$

- En el caso de torsor no nulo en el extremo -caso de éste empotrado-, su valor se obtiene por equilibrio global: la mitad del momento isostático en el extremo, no recogido por el par de las reacciones, es el momento torsor en cada viga:

$$M_t(0) = \frac{S}{2} \left[Q \left(\frac{y}{L} - 1 \right) + V(0) \right]$$

Con ello la ley de torsores sería, incluyendo el salto de la ley por la propia función $H(x-y)$:

$$M_t(x) = M_t(0) + \frac{S}{2} [V(x) - V(0) + H(x - y)]$$

- Y la ley de giros de torsión, siendo $HH(x-y)$ la función rampa igual a 0 para $x < y$ e $x-y$ para $x > y$:

$$\theta(x) = \theta(0) + \frac{M_t(0)}{GI, t} \cdot x + \frac{S}{2 \cdot GI, t} \cdot [HH(x - y) - M_f(x) - x \cdot V(0)]$$

4.4.- CASO DE CARGA LINEAL UNIFORME

La solución de la ecuación diferencial (4.6) con valor de carga constante (q), consiste en la misma ecuación (4.7) como solución de la homogénea, más una solución particular que puede ser simplemente q , con lo cual queda:

$$p(x) = A1 \cdot \text{Cosh}(ux) \cdot \text{Cos}(vx) + A2 \cdot \text{Cosh}(ux) \cdot \text{Sen}(vy) + \\ + A3 \cdot \text{Senh}(ux) \cdot \text{Cos}(vx) + A4 \cdot \text{Senh}(ux) \cdot \text{Sen}(vx) + q$$

Las expresión anterior se simplifica notablemente al considerar origen $x'=0$ el centro de la viga con lo cual los coeficientes $A2$ y $A3$ son nulos, ya que aportan componentes antisimétricas no compatibles con la solución. La ecuación posee por tanto solo 2 incógnitas a determinar con las dos condiciones de contorno en uno de los extremos, referentes a los valores de la función y de alguna de sus derivadas, dependiendo de las condiciones de apoyo. Las solicitaciones y deformaciones se obtienen de forma similar, siendo las expresiones de torsores y giros de torsión los siguientes:

$$M_t(x') = M_t \left(-\frac{L}{2} \right) + \frac{S}{2} \cdot \left(q \cdot \left[\left(x' + \frac{L}{2} \right) \right] + V(x') - V \left(-\frac{L}{2} \right) \right) \\ \theta(x') = \theta \left(-\frac{L}{2} \right) + \frac{M_t \left(-\frac{L}{2} \right) \cdot x'}{GI, t} + \frac{S \cdot \left[\frac{q \cdot \left(\left[x' + \frac{L}{2} \right] \right)^2}{2} - M_f(x') - V \left(-\frac{L}{2} \right) \cdot \left(x' + \frac{L}{2} \right) \right]}{2GI, t}$$

4.5.- ANÁLISIS DE RESULTADOS PARA UN CASO TIPO

Se ha aplicado las fórmulas anteriores, para un tablero con dos vigas artesas, con las siguientes características geométricas y mecánicas:

- Luz de cálculo: 24.0m
- Separación entre ejes de vigas: 5.50m (Plataforma 12m)
- Canto tablero: 1.10 viga + 0.25 losa
- Rigidez a flexión (EI) por viga: 14951 MNm²
- Rigidez a torsión (GI,t) por viga: 14171 MNm²
- Factor rigidez vertical losa (K_{uu}) = 2.56 MN/m²
- Factor rigidez cruzada ($K_{u\theta}$) = 7.04 MN/m
- Factor $K_1 = K_{u\theta} \cdot S / GI,t = 0.00273 \text{ 1/m}^2$
- Factor $K_2 = 2K_{uu} / EI = 0.00035 \text{ 1/m}^4$
- Parámetro $a = 1/K_2 = 2849.3 \text{ m}^4$
- Parámetro $b = K_1/K_2 = 7.79 \text{ m}^2$

En los siguientes gráficos se presenta la función de Green de descarga $p(X,Y)$ en kN/m para el caso de carga local de 1 kN (valor de p en coordenada X para carga situada en coordenada Y), para el caso de extremos fijos y libres a torsión:

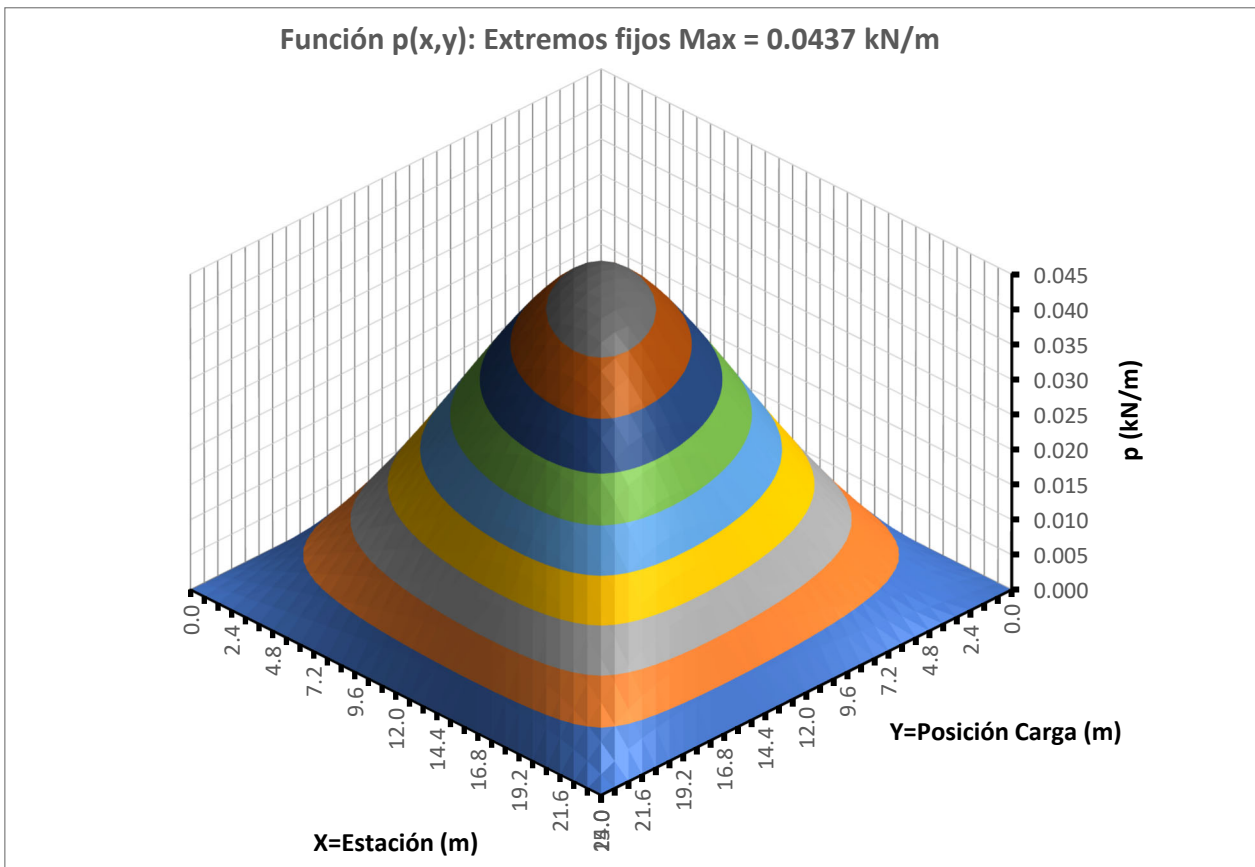


Figura 6: Función de Green de la función de descarga para carga antisimétrica y apoyos fijos.

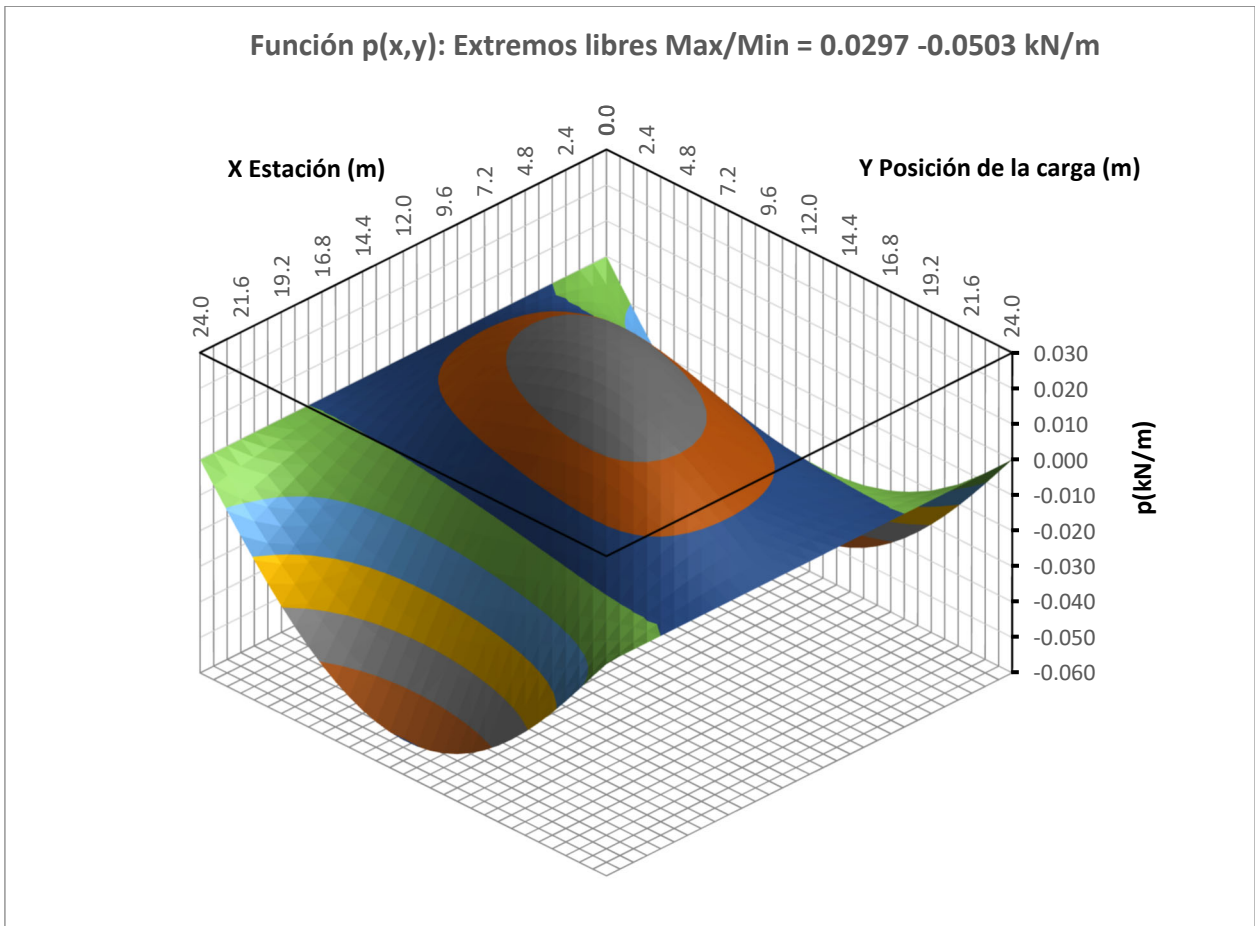


Figura 7: Función de Green de la función de descarga para carga antisimétrica y apoyos libres

Se presenta a continuación el diagrama de la función de descarga -en ambas condiciones de apoyo-, para el caso de carga lineal antisimétrica:

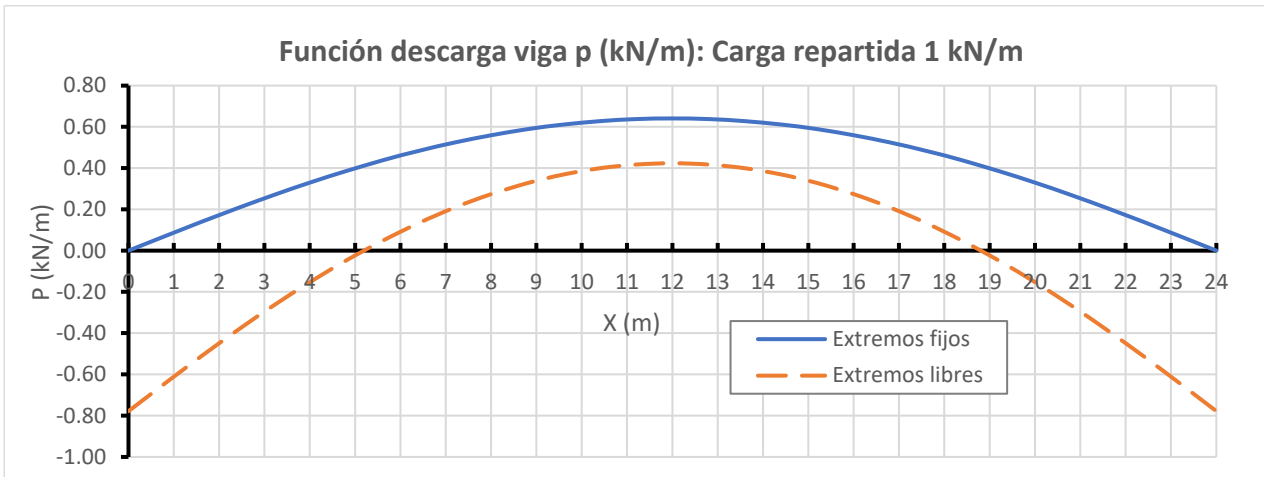


Figura 8: Función de descarga para carga repartida

Y para el caso de carga puntual situada a 5.6m del apoyo:

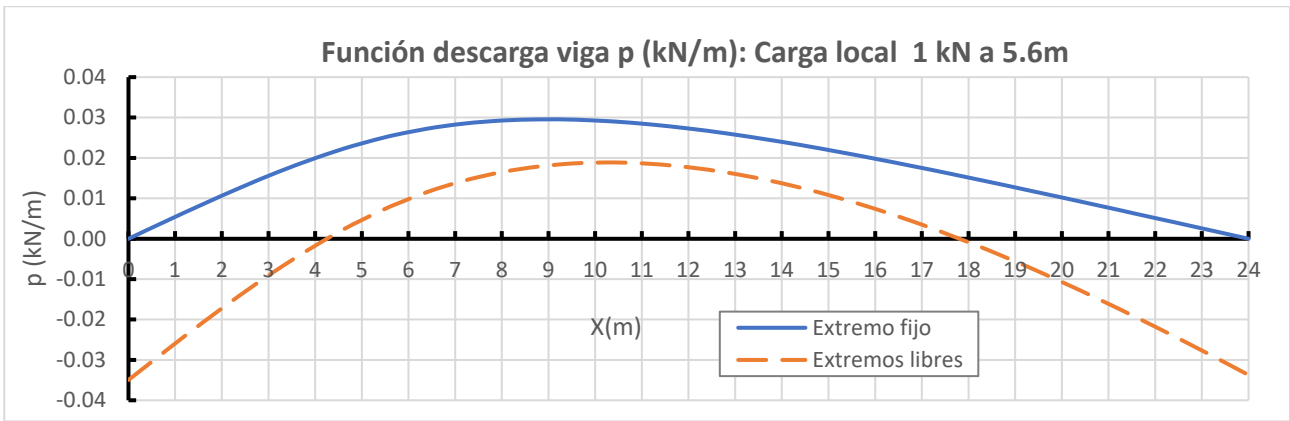


Figura 9: Función de descarga para carga local a ¼ luz

Se observa la efectividad del reparto transversal, con un valor del 64.1% para el caso de extremos fijos frente al 42.3% del caso de extremos libres, en la situación de carga uniforme de viga. Es reseñable también, una inversión de la ley en el segundo caso en los extremos: el reparto solo es efectivo en los dos cuartos centrales, en donde se produce la mayor deformación; cuando esta se reduce en los extremos el efecto de giro de torsión es predominante, y se invierte el proceso. Como se ha observado anteriormente, se produce un reparto longitudinal con un balance de carga en apoyos cero. Esto se aprecia mejor en el diagrama de cortantes, en las que se compara además con la ley isostática sin reparto, observándose que su valor en el extremo es el mismo, solo obteniéndose una reducción, si los extremos están fijos.

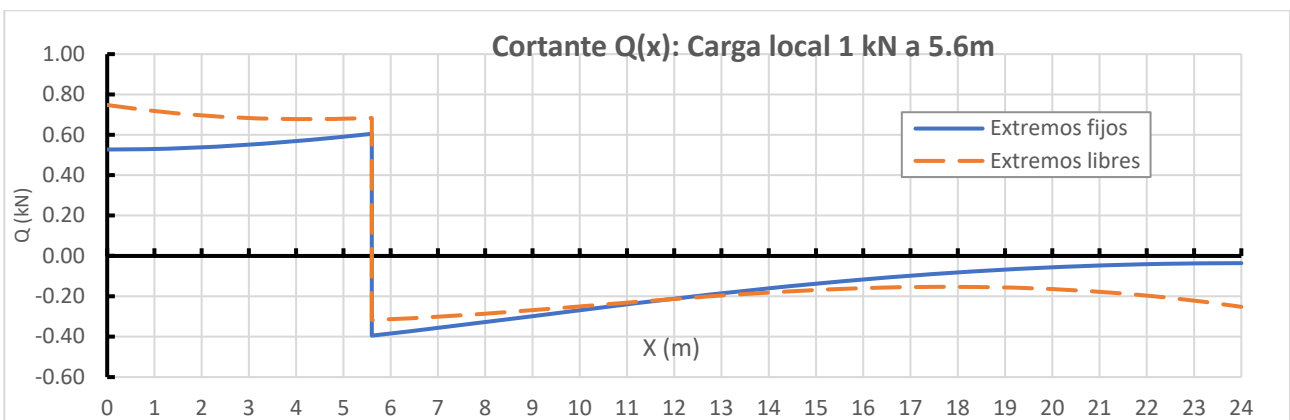
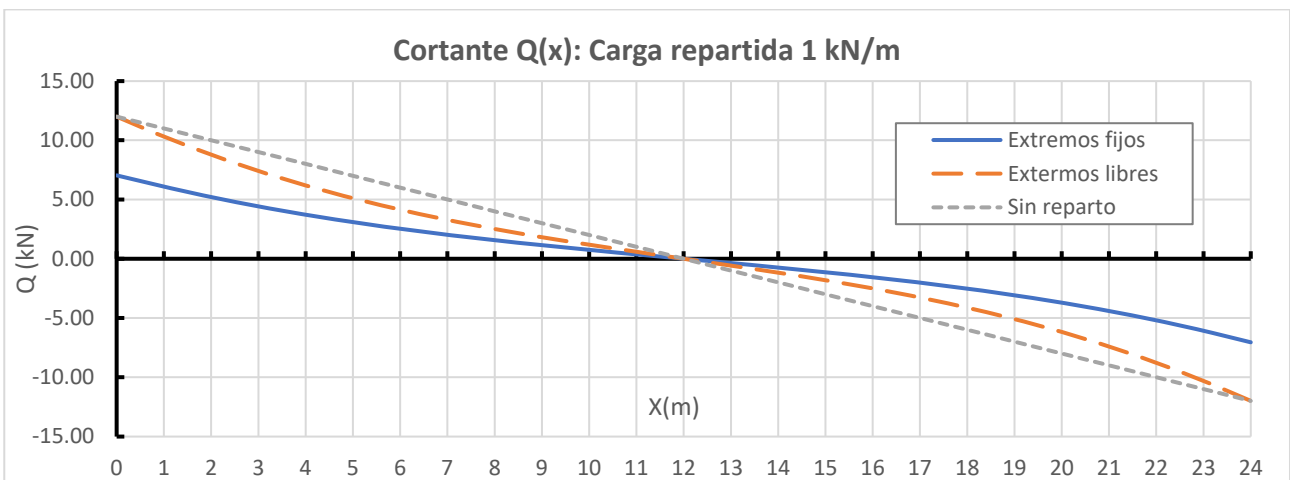


Figura 10: Cortantes para carga repartida y local a ¼ luz

En términos de flectores, la reducción es apreciable: 52.3 % frente a 20.6%, tal como se aprecia en el siguiente gráfico.

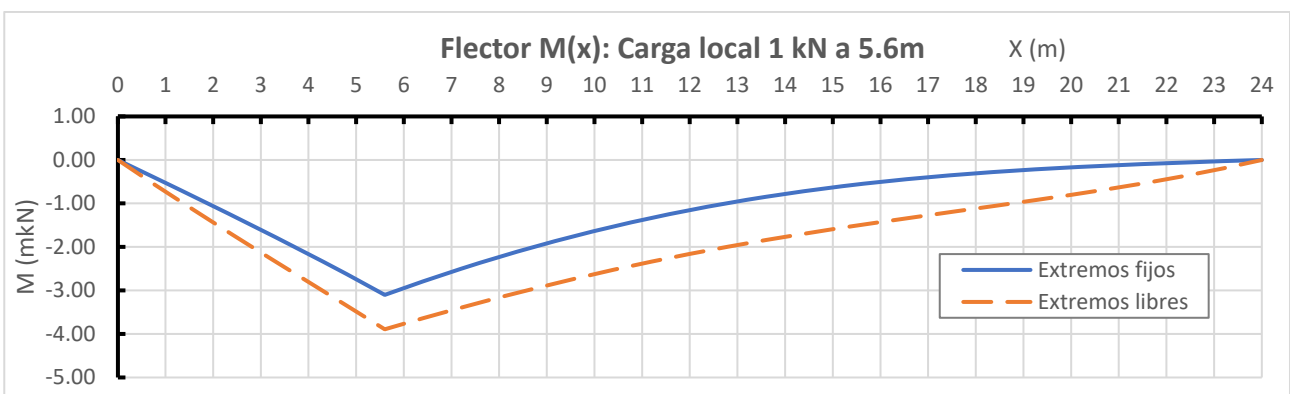
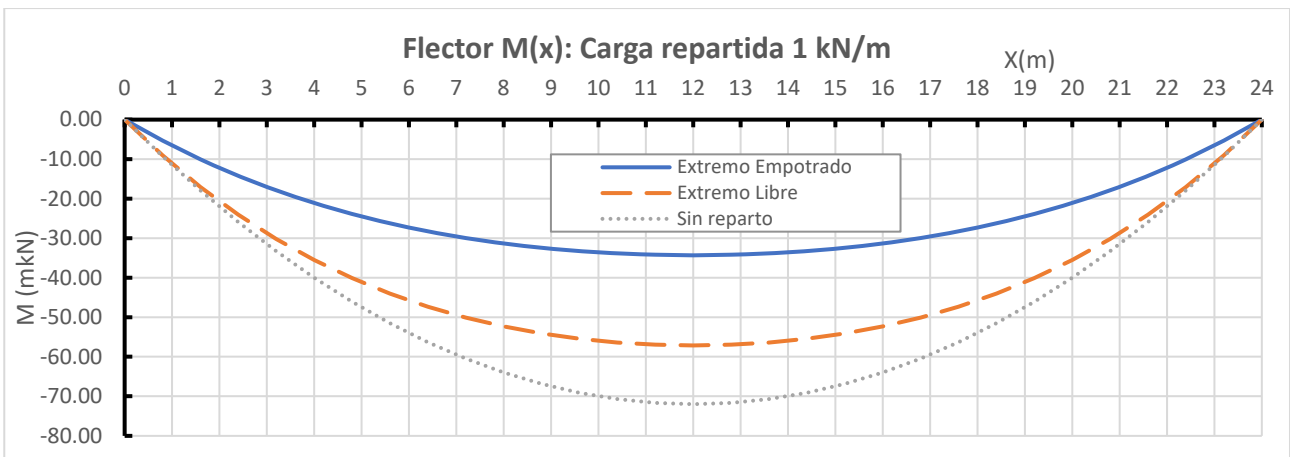


Figura 11: Flectores para carga repartida y local a ¼ luz

En los siguientes gráficos se presentan de forma comparativa para ambos tipo de sustentación, los diagramas de torsores, deformaciones verticales y giros de torsión:

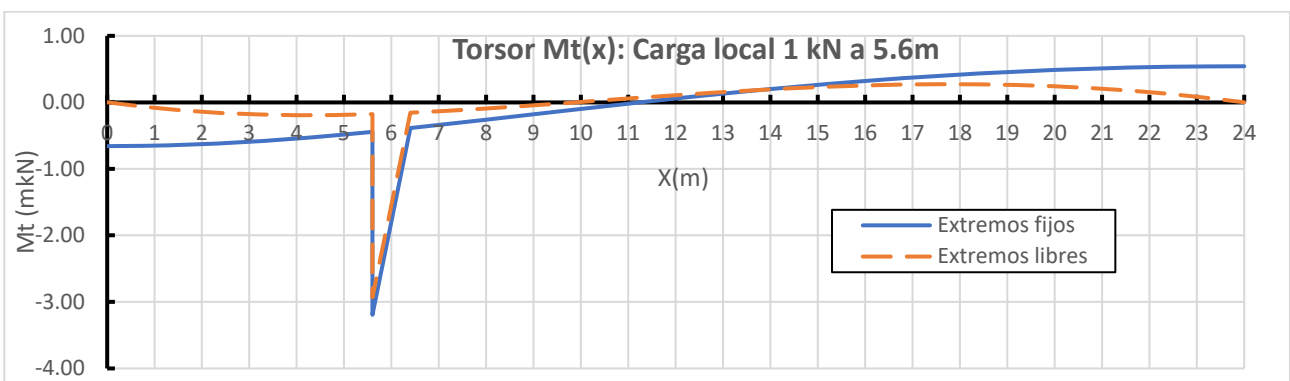
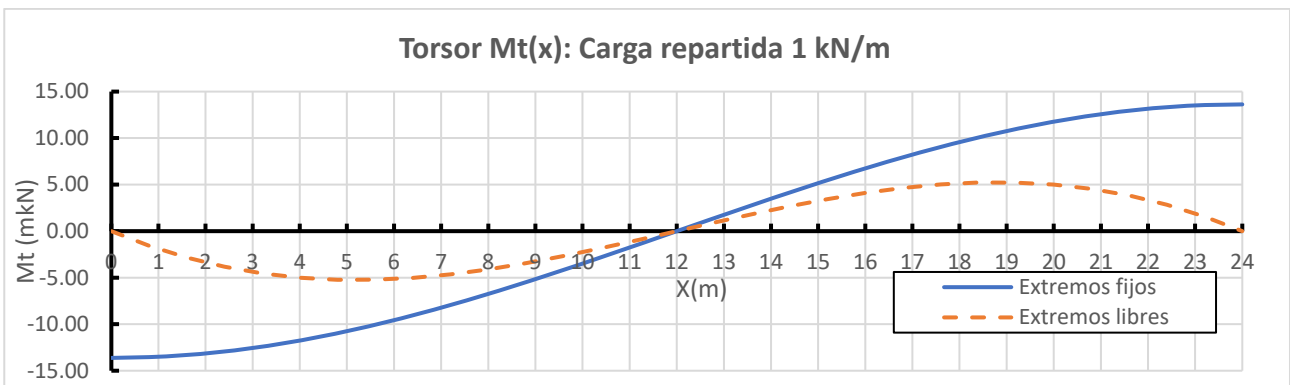


Figura 12: Torsores para carga repartida y local a ¼ luz

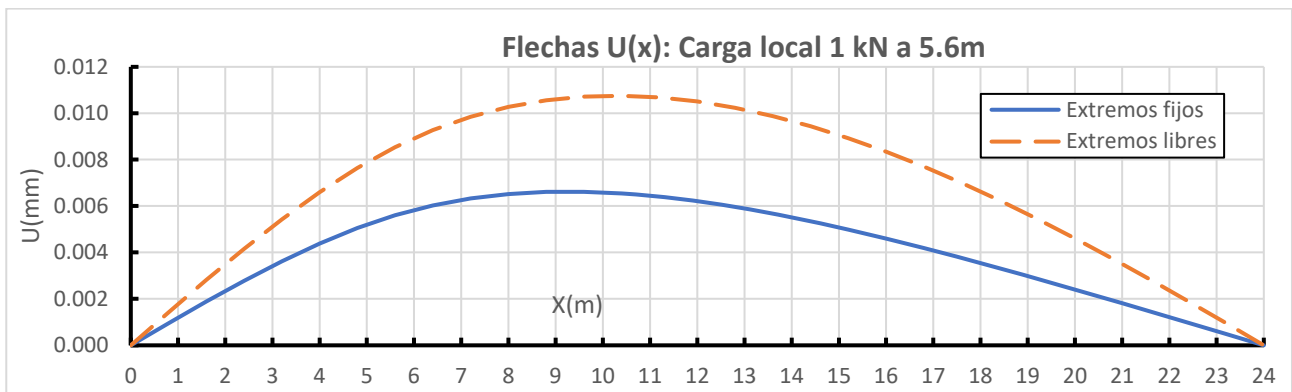
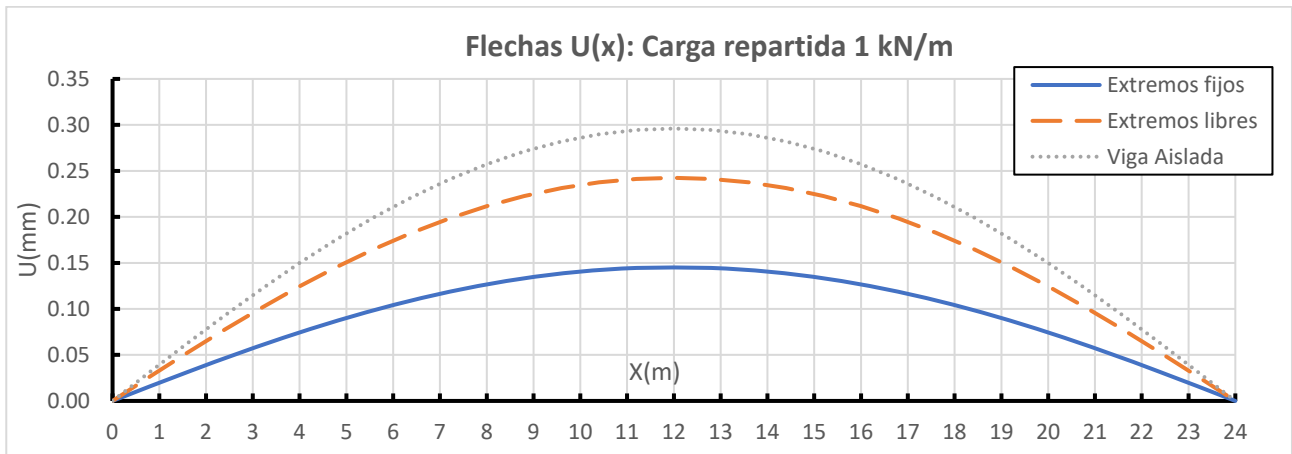


Figura 13: Diagrama de flechas para carga repartida y local a $\frac{1}{4}$ luz

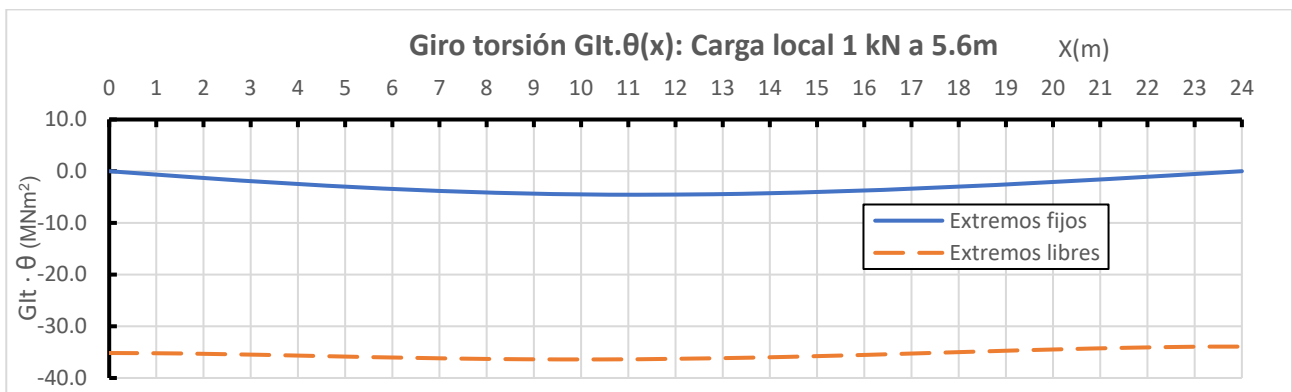
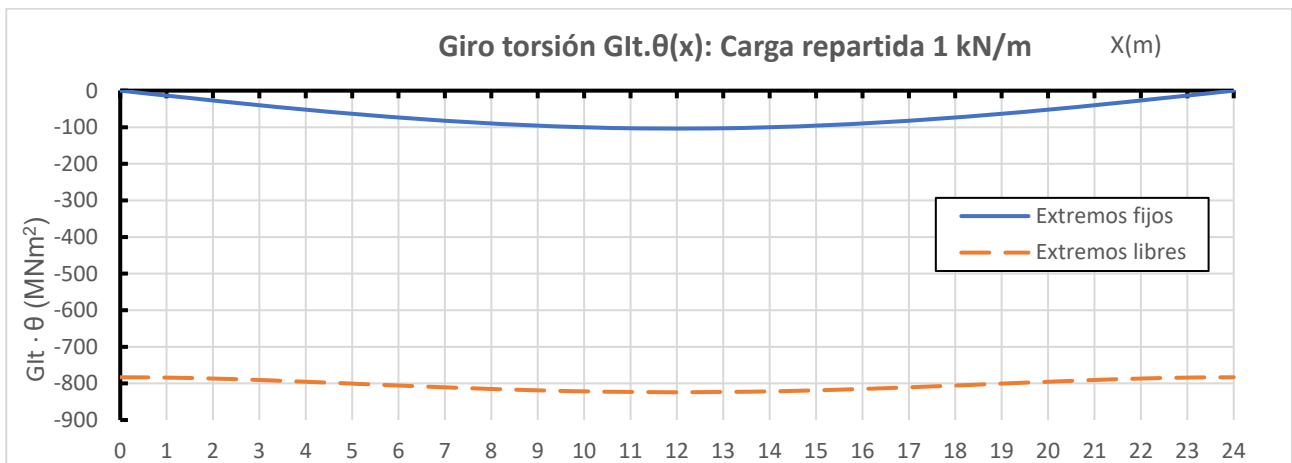


Figura 14: Diagrama de giros de eje viga para carga repartida y local a $\frac{1}{4}$ luz

5.- ESTADO DE APLICACIÓN DE MOMENTO TORSOR ANTISIMÉTRICO

El planteamiento de reparto transversal es bastante parecido, sin más que sustituir la función de carga $q(x)$, por otra $ma(x)$ -torsor repartido a lo largo de la viga-, para obtener como resultado la función de descarga $p(x)$, de acuerdo al siguiente esquema:

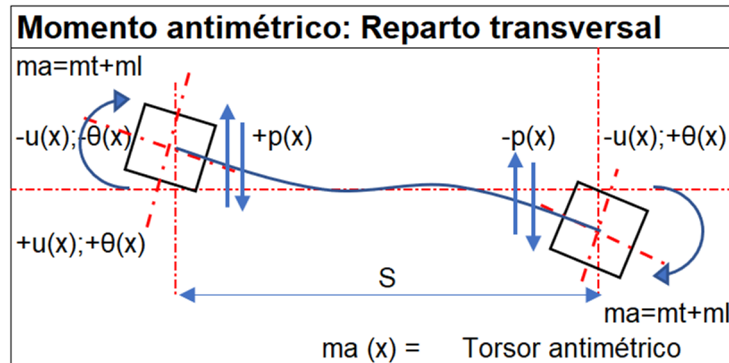


Figura 15: Nomenclatura de acciones, solicitaciones y deformaciones para momento antisimétrico

Para conservar la acción exterior positiva, la función de descarga posee signo negativo en ella, es decir, se trata en realidad de una función de recarga vertical hacia abajo que provocará deformación vertical negativa y flexión positiva en dicha viga. En este caso, la acción exterior $ma(x)$ se repartirá en un torsor de viga $mt(x)$ y una flexión de losa $ml(x)$. La nomenclatura de las variables y los criterios de signos son los mismos que el caso anterior.

Las ecuaciones que relacionan dichas variables en este caso son las siguientes

1. La primera ecuación es la general de flexión viga Bernoulli, que en este caso carece de término de carga exterior aplicada, siendo negativo el signo al corresponder a la recarga de viga hacia abajo:

$$-p(x) = EI \cdot u^{IV} \quad (5.1)$$

2. Las ecuaciones (2.2) y (2.3) son las mismas que en el caso anterior, reproduciéndolas por conveniencia:

$$\frac{Mt(x)}{GI_t} = \theta'(x) \quad (5.2)$$

$$p(x) = 2u(x) \cdot K_{uu} - 2\theta(x) \cdot K_{u\theta} \quad (5.3)$$

3. La ecuación de equilibrio de losa cambia de signo, de acuerdo al criterio explicado. A dicha ecuación hay que añadir, el reparto del momento exterior entre viga y losa

$$ml(x) = + \frac{p(x) \cdot S}{2} \quad (5.4)$$

$$ma(x) = ml(x) + mt(x) \quad (5.5)$$

Con todo ello, entre (5.1), (5.3) y (5.4) se obtiene:

$$\frac{ml(x)}{S} = u(x) \cdot K_{uu} - \theta(x) \cdot K_{u\theta}$$

$$\frac{-2 \cdot ml(x)}{S} = EI \cdot u^{IV}$$

$$\frac{-EI \cdot u^{IV}}{2} = u(x) \cdot K_{uu} - \theta(x) \cdot K_{u\theta} \quad (5.6)$$

Entre (5.5), derivando (5.2), y sustituyendo en la anterior:

$$\begin{aligned} ma(x) &= ml(x) + GI_t \cdot \theta''(x) \\ ma(x) &= -\frac{EI \cdot S \cdot u^{IV}}{2} + GI_t \cdot \theta''(x) \quad (5.7) \end{aligned}$$

Despejando $\theta(x)$ de (5.6) y derivando dos veces:

$$\theta''(x) = u'' \cdot \frac{K_{uu}}{K_{u\theta}} + \frac{EI \cdot u^{VI}}{2K_{u\theta}}$$

Esta expresión se sustituye en (5.7), para obtener:

$$ma(x) = -\frac{EI \cdot S \cdot u^{IV}}{2} + GI_t \cdot \left[u'' \cdot \frac{K_u}{K_{u\theta}} + \frac{EI \cdot u^{VI}}{2K_{u\theta}} \right]$$

Podemos efectuar un cambio de variable identificando el factor $EI \cdot u''(x)$ como $mf(x)$, el flector longitudinal, con lo cual queda:

$$\frac{2 \cdot ma(x)}{GI_t} = \frac{mf^{IV}(x)}{K_{u\theta}} - \frac{S \cdot mf''(x)}{GI_t} + \frac{2K_{uu}}{EI \cdot K_{u\theta}} \cdot mf(x)$$

Reordenando los términos:

$$mf^{IV}(x) - \frac{K_{\theta} \cdot S}{GI_t} \cdot mf''(x) + \frac{2K_{uu}}{EI} \cdot mf(x) = \frac{2ma(x) \cdot K_{u\theta}}{GI_t} \quad (5.8)$$

Que es exactamente la misma ecuación diferencial (4.7) que rige el reparto para carga vertical, salvo el cambio de factores de rigideces del término independiente. Denominando al igual que antes:

$$a = \frac{EI}{2K_{uu}} \quad b = \frac{S \cdot K_{u\theta} \cdot EI}{2K_{uu} \cdot GI_t} \quad c = \frac{K_{u\theta} \cdot EI}{K_{uu} \cdot GI_t}$$

$$a \cdot mf^{IV}(x) - b \cdot mf''(x) + mf(x) = c \cdot ma(x) \quad (5.9)$$

Por tanto, la solución general de esta ecuación diferencial en términos de $mf(x)$, es idéntica a la obtenida anteriormente (5.10)

$$mf(x) = A1 \cdot \text{Cosh}(ux) \cdot \text{Cos}(vx) + A2 \cdot \text{Cosh}(ux) \cdot \text{Sen}(vy) + A3 \cdot \text{Senh}(ux) \cdot \text{Cos} + A4 \cdot \text{Senh}(ux) \cdot \text{Sen}(vx)$$

5.1.- CÁLCULO DE DEFORMACIONES Y SOLICITACIONES EN EL CASO GENERAL

La obtención de la solución de la función $mf(x)$ permite obtener expresiones sencillas del resto de solicitaciones y deformaciones mediante estos pasos:

- La ley de cortantes se obtiene por derivación de la ley de flectores, y la función de reparto por derivación de la ley de cortantes:

$$V(x) = -\frac{dmf(x)}{dx} \quad p(x) = \frac{dV(x)}{dx} = -\frac{d^2mf(x)}{dx^2}$$

- Con las reacciones de apoyo y el equilibrio global, se calcula el valor del torsor en el extremo dorsal, en el caso de que estuviera empotrado. La ley de torsores repartidos se obtiene directamente a partir de la ley de reparto $p(x)$ multiplicada por $S/2$. Con ello, el torsor en el extremo dorsal y la ley de torsores antisimétricos dato, se obtiene la ley de torsores en cualquier sección, siendo $Ma(x)$ la función primitiva de la ley de momentos antisimétricos exteriores:

$$\frac{dM_t(x)}{dx} = -mt(x) = -ma(x) + ml(x) = -ma(x) + p(x) \cdot \frac{S}{2}$$

$$M_t(x) = M_t(0) - Ma(x) + [V(x) - V(0)] \cdot \frac{S}{2}$$

- La integración de la ecuación anterior nos permite obtener **la ley de giros de torsión**, estimando las relaciones entre flectores y cortantes. Siendo $MMa(x)$ la función primitiva de $Ma(x)$

$$\theta(x) = \theta(0) + \frac{M_t(0)}{GI_t} \cdot x - \frac{MMa(x)}{GI_t} - \frac{S}{2GI_t} \cdot [M_f(x) + x \cdot V(0)]$$

- Con la función de descarga y con la ley de giros de torsión se obtiene directamente **la ley de flechas**:

$$u(x) = \frac{p(x)}{2K_{uu}} + \theta(x) \cdot \frac{K_{u\theta}}{K_{uu}}$$

Las expresiones analíticas generales de la funciones $mf(x)$, sus derivadas y sus primitivas son idénticas a las presentadas para la función $p(x)$ del caso anterior.

5.2.- CONDICIONES DE APOYO A TORSIÓN USUALES

Análogamente, obtendremos las expresiones aplicadas a los casos de extremos analizados:

a) Caso de extremos empotrados a torsión:

- Por apoyo simple a flexión: $mf(0) = mf(L) = 0$
- Por giro impedido a torsión: $\theta(0) = \theta(L) = 0$
- Por condición de apoyo vertical: $u(0) = u(L) = 0$
- Con lo cual de acuerdo a ecuación (5.3): $mf''(0) = mf''(L) = 0$

Siendo las marcadas, las cuatro condiciones de contorno del problema para el caso general.

b) Caso de extremos libres para el giro de torsión. Las cuatro condiciones son algo más complicadas. Al igual que antes:

- Por apoyo simple a flexión: $mf(0) = mf(L) = 0$
- Por condición de apoyo vertical: $u(0) = u(L) = 0$
- Por torsor nulo en los extremos: $\theta'(0) = \theta'(L) = 0$

La resultante global de torsión exterior se equilibra con los pares de torsión que general las reacciones en los extremos, las cuales se obtienen por el valor de la derivada de la $mf(x)$ en los extremos. Se considera el caso general, de resultante exterior variable, en función de su primitiva en los extremos. Con ello tenemos la siguiente 3ª condición:

$$[mf'(0) - mf'(L)] \cdot \frac{S}{2} = Ma(L) - Ma(0)$$

- La cuarta condición es algo más complicada. En el extremo dorsal, al tener torsor nulo, $\theta'(0) = 0$, $p'(0) = -2K_{uu} \cdot u'(0)$ relación que nos proporcionará la solución, estableciendo las variables en función de los flectores: La función p' es la tercera derivada de la ley de flectores, particularizada en 0; $u'(0)$ es el giro en el extremo de flexión de viga, que se puede sacar por integración de la ley de flectores (Teorema de Mohr) y la rigidez a flexión; aplicándolo de la misma manera que en la ecuación (4.8):

$$\int_0^L (L-x) \cdot mf(x) \cdot dx = -Mf_{der}(Y) \cdot (L-y) + Mf_{izq}(Y) \cdot (L-y) -$$

$$-Mf_{izq}(0) \cdot L + MMf_{der}(L) - MMf_{izq}(0) = -EI \cdot u'(0) \cdot L$$

Siendo $M_f(x)$ la función primitiva de $m_f(x)$ -que se relaciona con la ley de giros de flexión- y $MM_f(x)$ la segunda primitiva -que se relaciona con ley de flechas-. Hay que observar que la primera función puede no ser continua en $x = y$ (caso de momento puntual), y debe contemplarse el salto mediante la aplicación de funciones diferentes por la izquierda y por la derecha en la integración por partes. En el caso de la segunda integral, ese salto no se produce.

Con los cual, se obtiene una expresión que relaciona la 3ª derivada de la función de flexión y sus primitivas, y que proporciona la 4ª condición.

$$m'''(0) + \frac{2Ku_u}{EI \left[M_{f_{izq}}(0) + \frac{MM_{f_{izq}}(0) - MM_{f_{der}}(L)}{L} + M_{f_{der}} \left(1 - \frac{Y}{L}\right) - M_{f_{izq}} \left(1 - \frac{Y}{L}\right) \right]} = 0$$

Al igual que para carga vertical exterior, en caso de distribución simétrica, la solución solo requiere dos coeficientes a determinar por condiciones de apoyo de los extremos, si se dispone el origen del eje viga X en su centro.

5.3.- CASO DE MOMENTO LOCAL: FUNCIÓN DE GREEN

Siguiendo la misma metodología que el caso de carga puntual, analizaremos la solución para la acción exterior $m_a(x) = m_a \cdot \delta(x-y)$, añadiendo a las cuatro condiciones de externo anteriormente obtenidas, las mismas condiciones de continuidad en el punto de aplicación, con la única diferencia es asignar el valor de "salto" en tercera derivada en valor $-c \cdot m_a / a$ (siendo c el valor de la fórmula 5.9). Con ello se obtienen las 8 constantes de integración para obtener los resultados siguientes:

- Las funciones $m_f(x)$, $V(x)$ y la función de descarga $p(x)$, se obtienen de forma directa como primera y segunda derivada respectivamente; son continuas, pero diferentes para $x < y$ $x > y$.
- En el caso de torsor no nulo en el extremo -caso de éste empotrado-, su valor se obtiene también por equilibrio global: la mitad del momento de reparto isostático en el extremo, no recogido por el par de las reacciones, es el momento torsor en cada viga:

$$M_t(0) = \frac{S}{2} \cdot V(0) + m_a \cdot \left(1 - \frac{Y}{L}\right)$$

Con ello la ley de torsores sería, incluyendo el salto de la ley por la propia función $H(x-y)$:

$$M_t(x) = M_t(0) + \frac{S}{2} \cdot [V(x) - V(0)] - m_a \cdot H(x - y)$$

- Con la ley de giros de torsión, siendo $HH(x-y)$ la función rampa igual a 0 para $x < y$ e $x-y$ para $x > y$, y la expresión

$$\theta(x) = \theta(0) + \frac{M_t(0)}{GI_t} \cdot x + \frac{S}{2 \cdot GI_t} \cdot [M_f(x) - x \cdot V(0)] - m_a \cdot HH(x - y)$$

5.4.- CASO DE MOMENTO TORSOR UNIFORME

La solución de la ecuación diferencial (5.8) con valor de momento repartido de valor constante (m_a), se obtiene de igual manera añadiendo a la ecuación general, la solución particular m_a de valor constante

$$m_f(x) = A1 \cdot \text{Cosh}(ux) \cdot \text{Cos}(vx) + A2 \cdot \text{Cosh}(ux) \cdot \text{Sen}(vy) + \\ + A3 \cdot \text{Senh}(ux) \cdot \text{Cos}(vx) + A4 \cdot \text{Senh}(ux) \cdot \text{Sen}(vx) + c \cdot m_a$$

Las solicitaciones y deformaciones se obtienen de forma similar, siendo las expresiones de torsores y giros de torsión los siguientes

$$M_t(x') = M_t\left(-\frac{L}{2}\right) - m_a \cdot \left(x' + \frac{L}{2}\right) + \frac{S}{2} \cdot \left[V(x') - V\left(-\frac{L}{2}\right)\right]$$

$$\theta(x') = \theta\left(-\frac{L}{2}\right) + \frac{M_t \cdot \left(x' + \frac{L}{2}\right)}{GI, t} - \frac{m_a \cdot \left(x' + \frac{L}{2}\right)^2}{2 \cdot GI, t} - \frac{S \cdot \left[M(x') \cdot x' + \left[V\left(-\frac{L}{2}\right) \cdot \left(x' + \frac{L}{2}\right)\right]\right]}{2GI, t}$$

5.5.- ANÁLISIS DE RESULTADOS

Para las mismas características de tablero que en el caso de cargas verticales anti métricas, se presentan a continuación los resultados para acciones de momentos. Se presentan a continuación las funciones de Green para extremos fijos y libres:

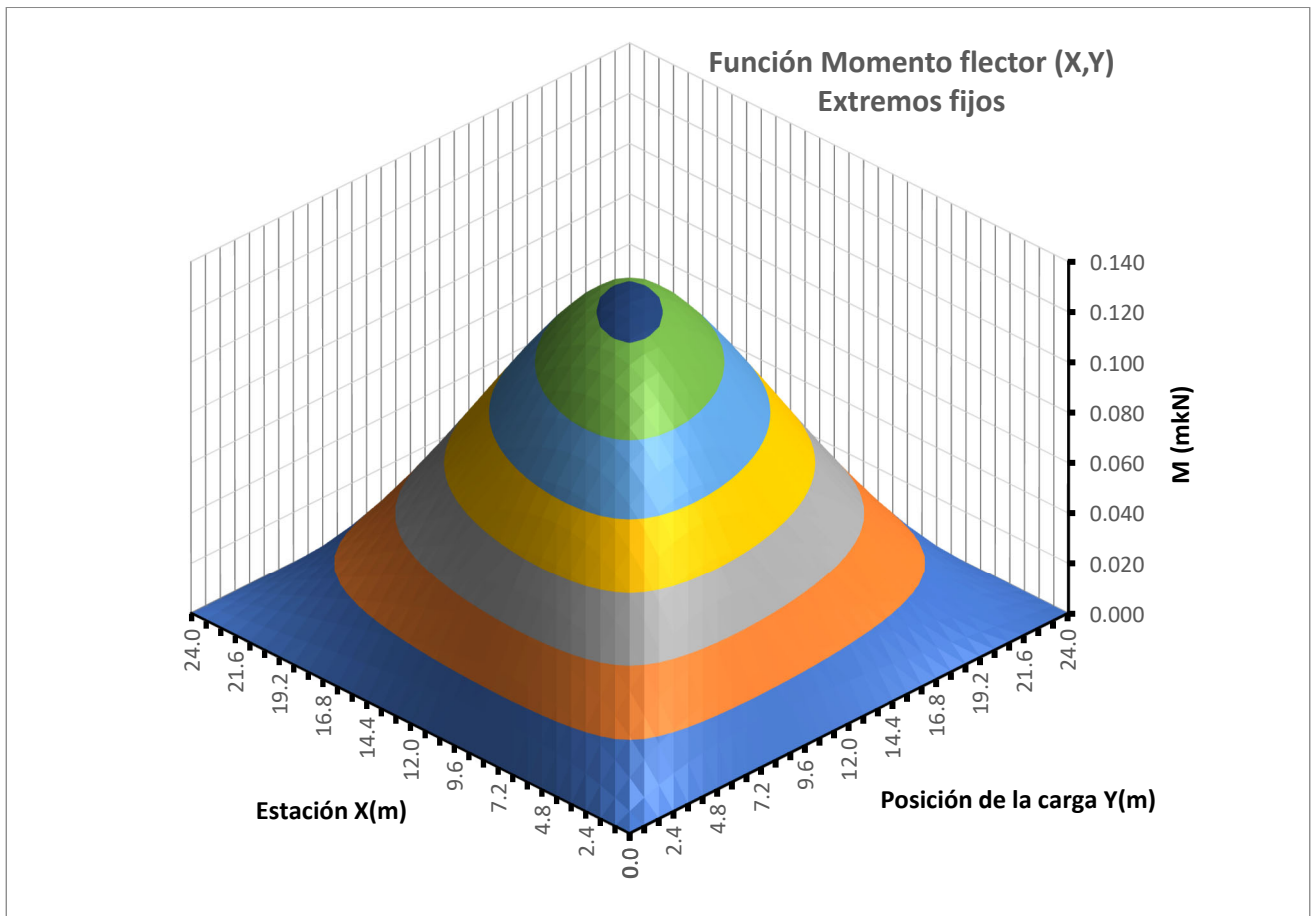


Figura 16: Función de Green de la función de descarga para momento antisimétrico y apoyos fijos

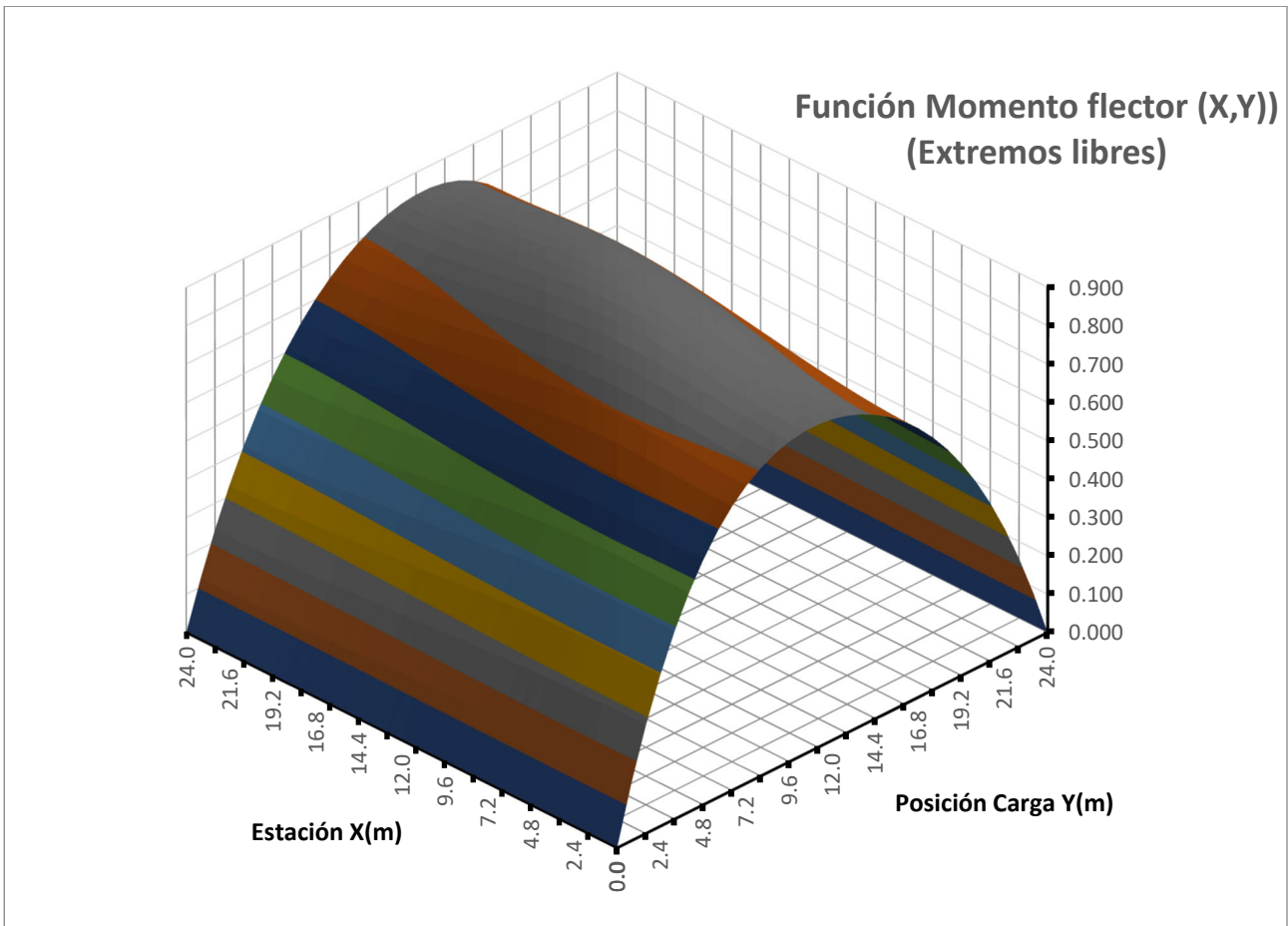


Figura 17: Función de Green de la función de descarga para momento antimétrico y apoyos libres

Los valores máximos obtenidos son de 0.124 en el primer caso ($X=Y=12m$), y 0.894 en el mismo punto, con una distribución que, como se observa, es muy poco dependiente de la posición de la carga. Los diagramas de momentos de flexión, que es la función de obtención directa, son los siguientes.

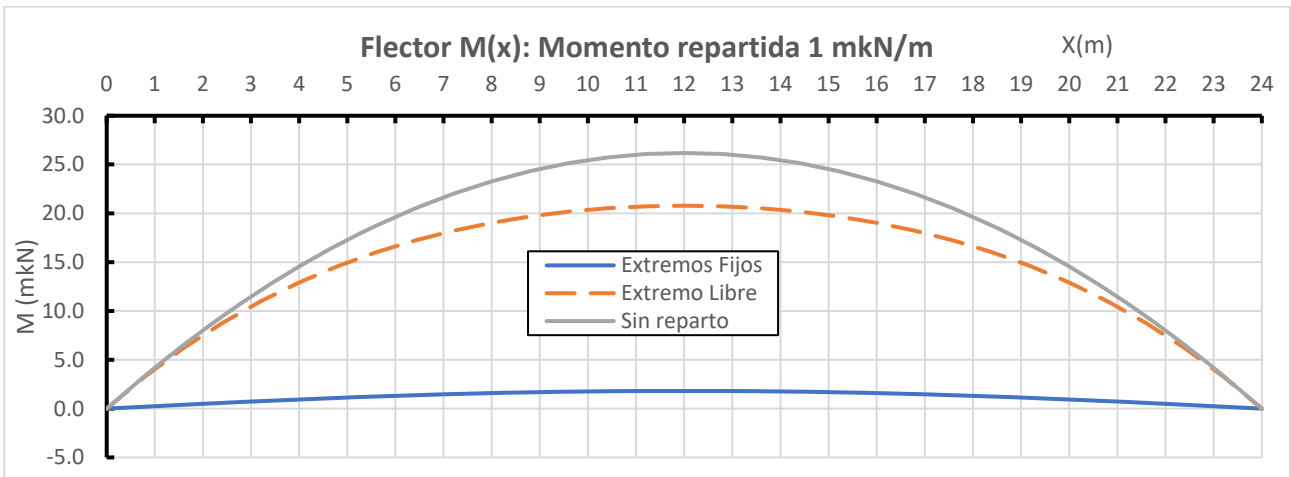


Figura 18: Flectores para momento repartido

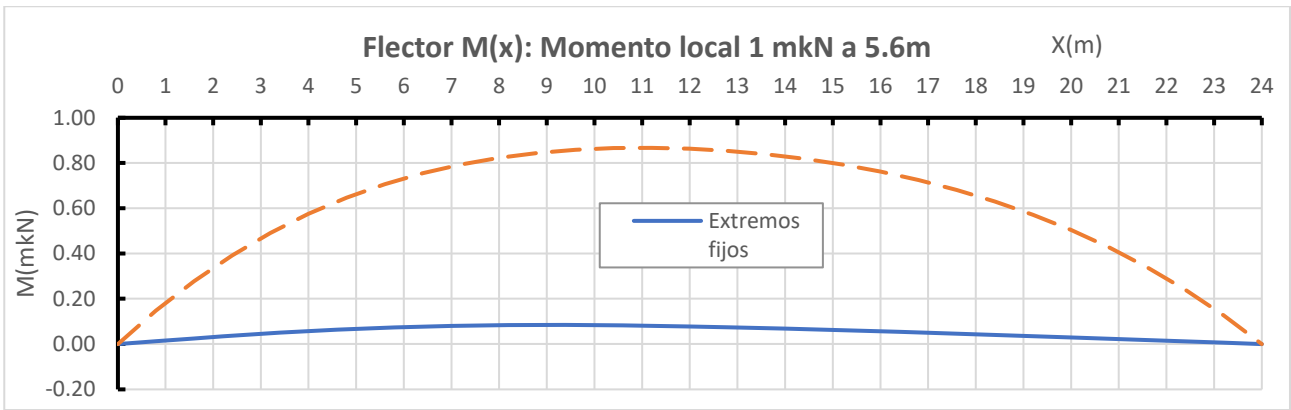


Figura 19: Flectores para momento local a ¼ luz

La comparación en este caso se realiza con la flexión inducida por una carga lineal de +/- 2m/S, sin torsión de vigas. Como se observa, la eficiencia del reparto es aquí muy grande para el caso de apoyos fijos (reducción del 93.1%) y muy reducida para apoyos libres (20.6%), superior al caso de carga lineal. Este efecto viene gobernado por la rigidez a torsión propia de la viga, y no por la transferencia de carga entre vigas; es por tanto determinante en este caso los factores de relación ancho – luz, y la relación de rigideces a flexión y torsión, además de las condiciones de apoyo de los extremos, como se aprecia bien en las funciones de descarga transversal:

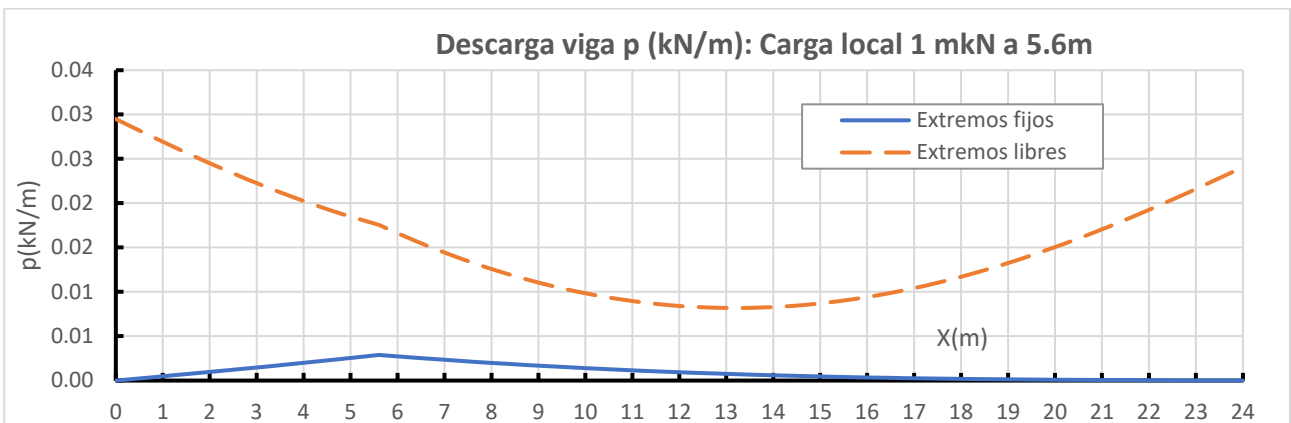
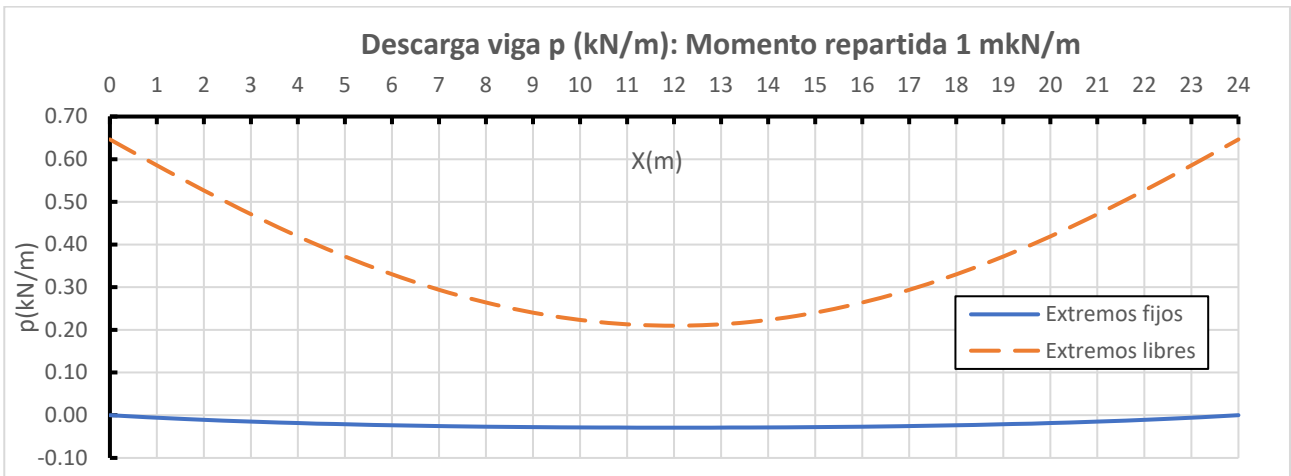


Figura 20: Función de descarga para momento repartido y local a ¼ luz

Los diagramas de cortantes y torsores están en relación con el argumento anterior: vigas muy poco solicitadas a cortante con extremos fijos, y muy solicitadas a torsión, y viceversa para extremos libres.

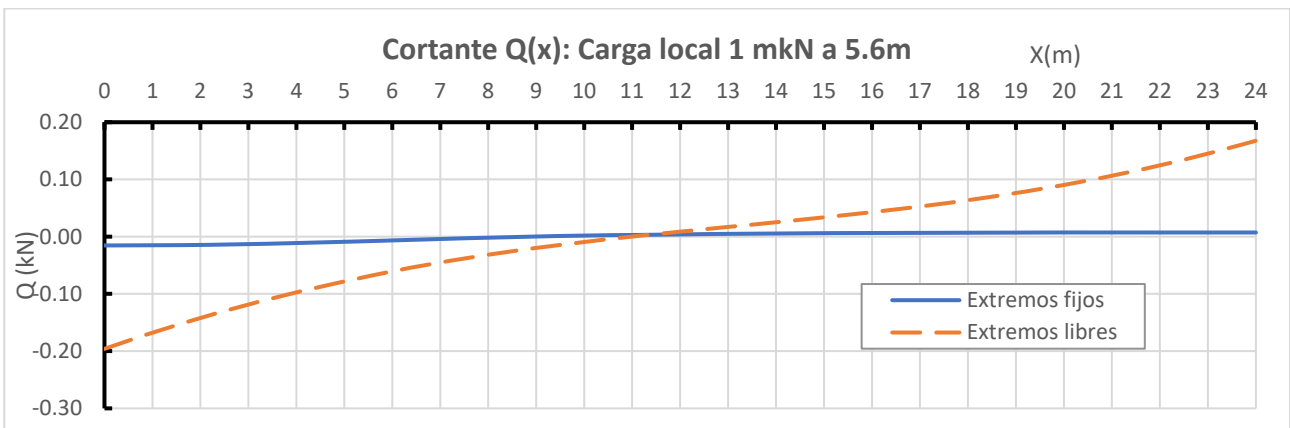
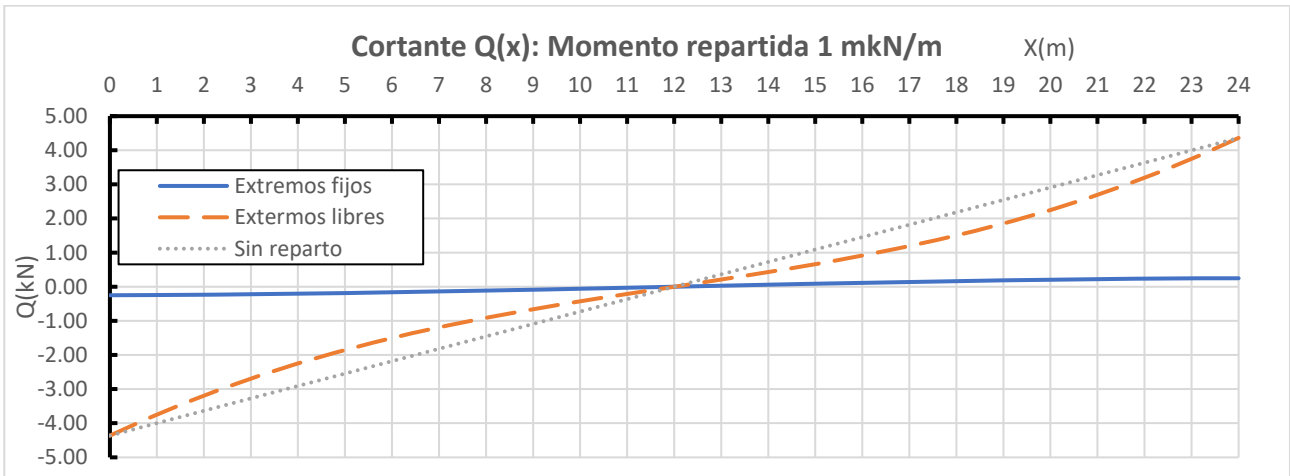
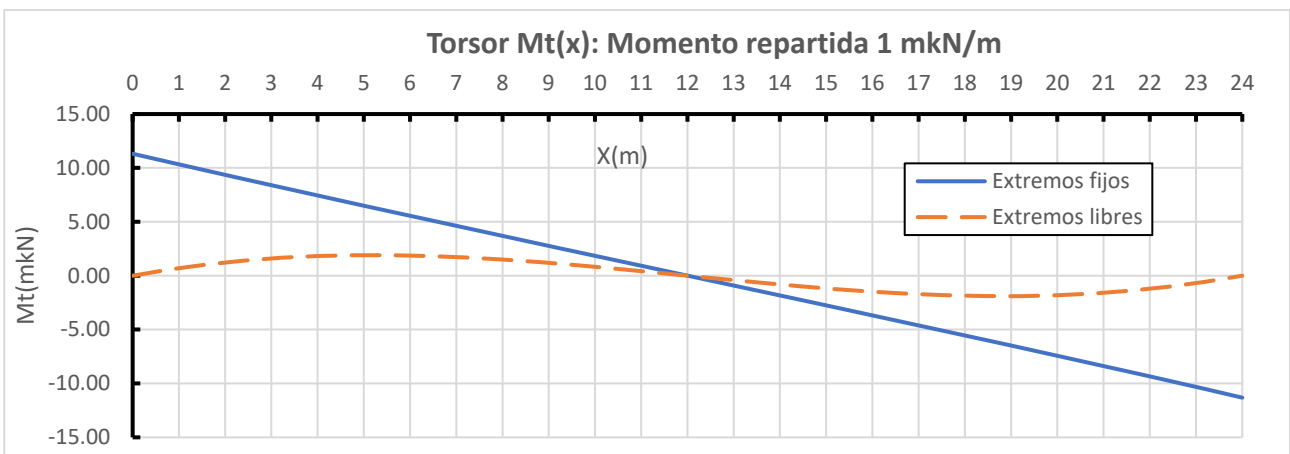


Figura 21: Cortante para momento repartido y local a ¼ luz



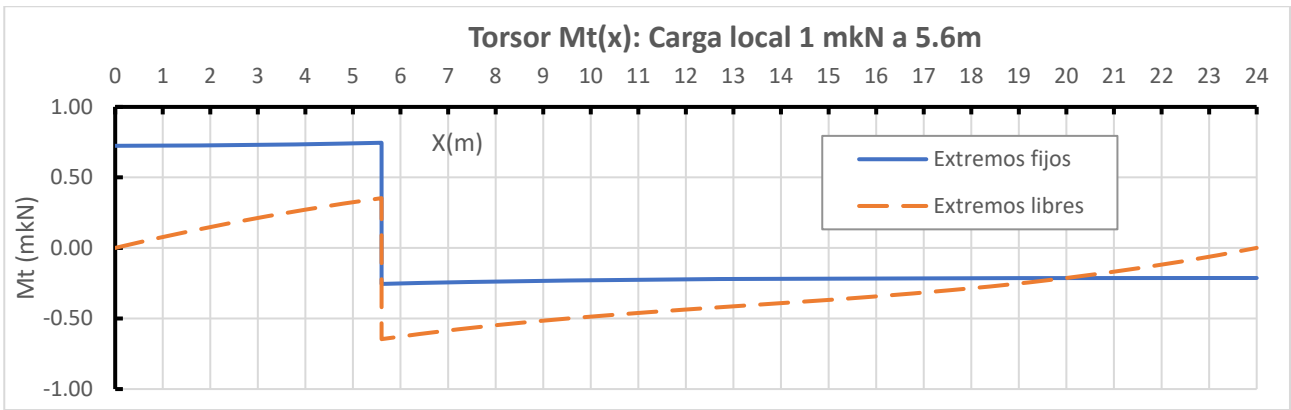


Figura 22: Torsor para momento repartido y local a ¼ luz

Los diagramas de deformaciones (giros de eje viga y flechas) son los siguientes:

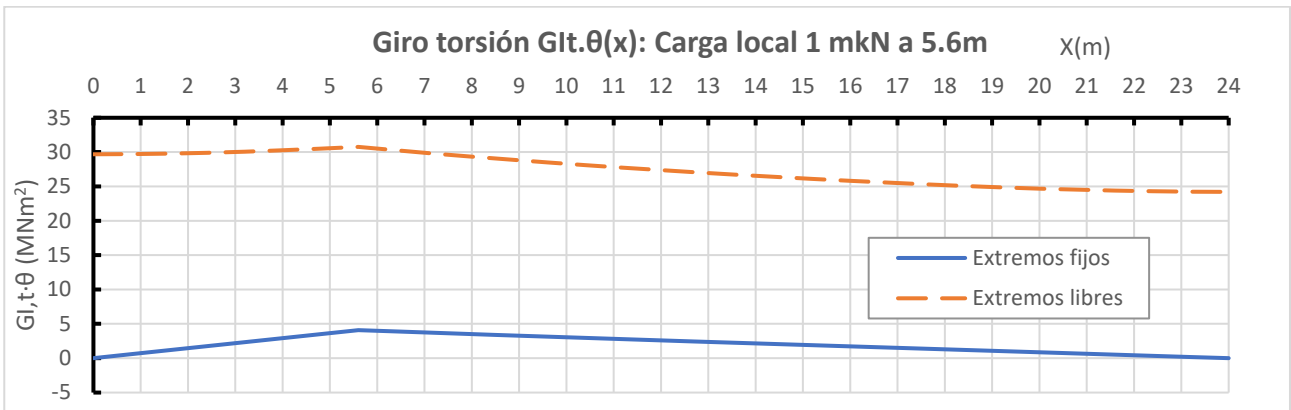
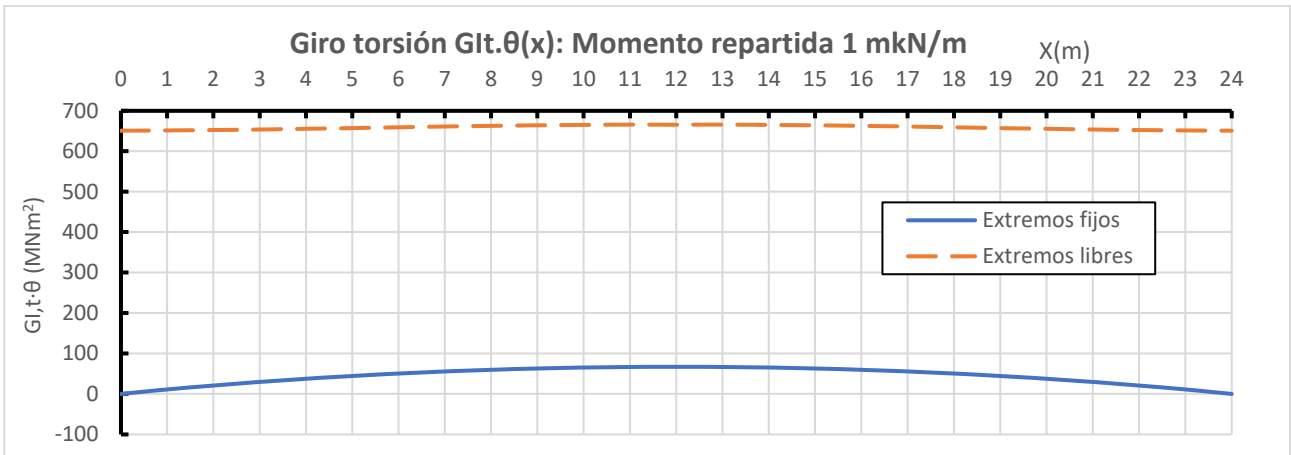


Figura 23: Giros de eje viga para momento repartido y local a ¼ luz

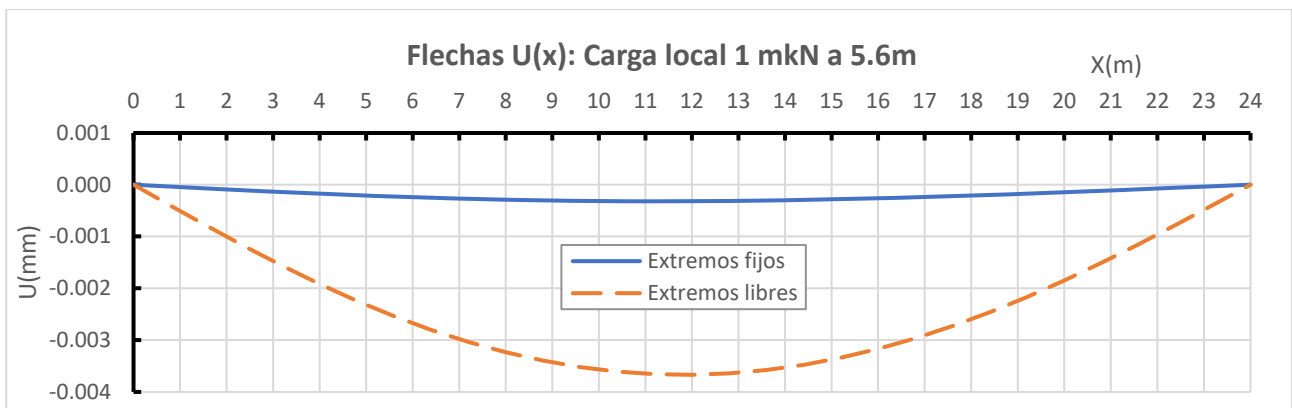
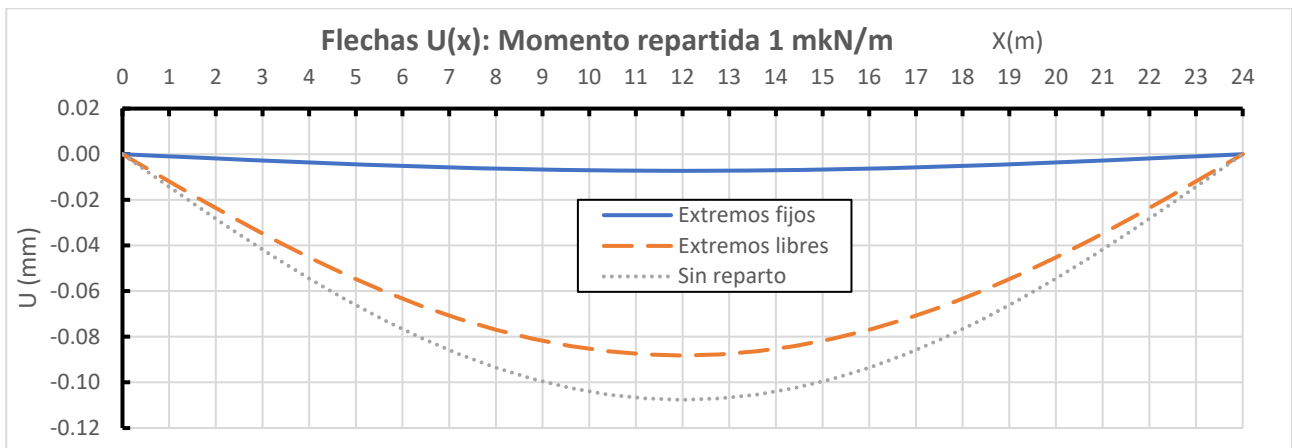


Figura 24: Diagrama de flechas de viga para momento repartido y local a ¼ luz

Todo ello indica que la sollicitación de torsión antimétrica se transforma casi en su totalidad en flexión longitudinal de cada viga en el caso de extremos libres, y en torsión de Saint Venant en el caso de extremos fijos, modulándose su valor con las propiedades mecánicas y geométricas del tablero.

6.- ESTADO DE APLICACIÓN DE MOMENTO TORSOR SIMÉTRICO

Para terminar la descomposición de estados, se analiza a continuación la sollicitación con función de momentos torsores simétricos respecto al eje de tablero. Esta situación no genera trabajo de flexión en viga, y sólo se produce un reparto longitudinal de torsores; de hecho el caso de torsor uniforme en ambas vigas con extremos libres es una solución trivial de flexión transversal solo en losa. En el caso general, vamos a plantear las ecuaciones de equilibrio y compatibilidad:

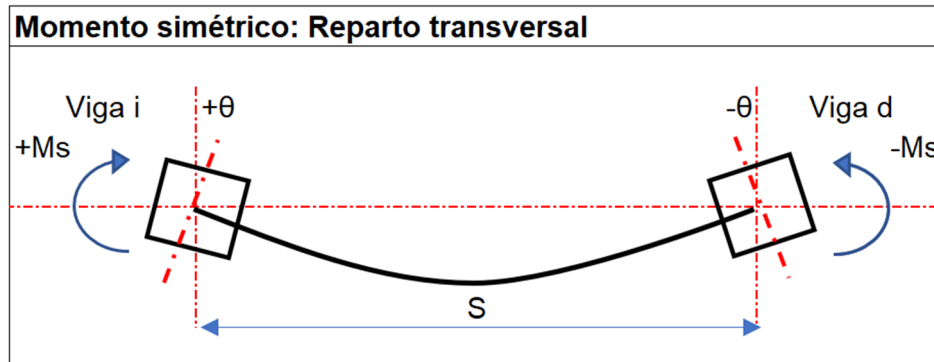


Figura 25: Nomenclatura de acciones, sollicitaciones y deformaciones para momento simétrico

Se aplica una ley de torsores $M_s(x)$, repartiéndose entre la flexión transversal de viga y el torsor de viga:

$$m_s(x) = m_l(x) - m_t(x)$$

Añadimos la relación entre giros de eje viga y ley de torsores, y la relación entre dichos giros y la flexión de losa

$$\frac{m_t(x)}{GI_t} = \theta''(x) \quad m_l(x) = K_{\theta\theta} \cdot \theta(x)$$

Quedando la ecuación diferencial de segundo grado:

$$m_s(x) = K_{\theta\theta} \cdot \theta(x) - GI_t \cdot \theta''(x)$$

Cuya solución es del tipo:

$$\theta(x) = A_1 \cdot \text{Cosh}(kx) + A_2 \cdot \text{Senh}(kx)$$

Siendo

$$k = \sqrt{\frac{K_{\theta\theta}}{GI_t}}$$

Una vez obtenida la ley de giros de torsión y su primera derivada, se obtiene directamente la ley de flexión transversal de la losa y la ley de torsores.

Las condiciones de apoyo son bastante simples:

- Caso de apoyos libres, con torsor nulo en los extremos: $\theta'(0) = \theta'(L) = 0$
- Caso de apoyos fijos a torsión: $\theta(0) = \theta(L) = 0$.

El caso general de momento puntual simétrico, existen dos funciones a cada lado de la carga con dos constantes de integración cada una. Se resuelven las cuatro constantes de integración, con las dos condiciones de extremo, y las otras dos son la continuidad de la ley de giros de torsión, y el salto de la 1ª derivada que es $-Ms/GI_t$.

En el caso de momento uniforme repartido en toda la viga, hay una sola constante de integración: la respuesta simétrica, para origen de coordenadas en el centro de la viga, supone que A_2 sea 0. Es obvio, que en el caso de extremos libres a torsión, no hay reparto longitudinal, y toda la acción

se absorbe por flexión de losa. Los resultados para el caso de momento local, también comparando la situación de extremos fijos y libres será la siguiente:

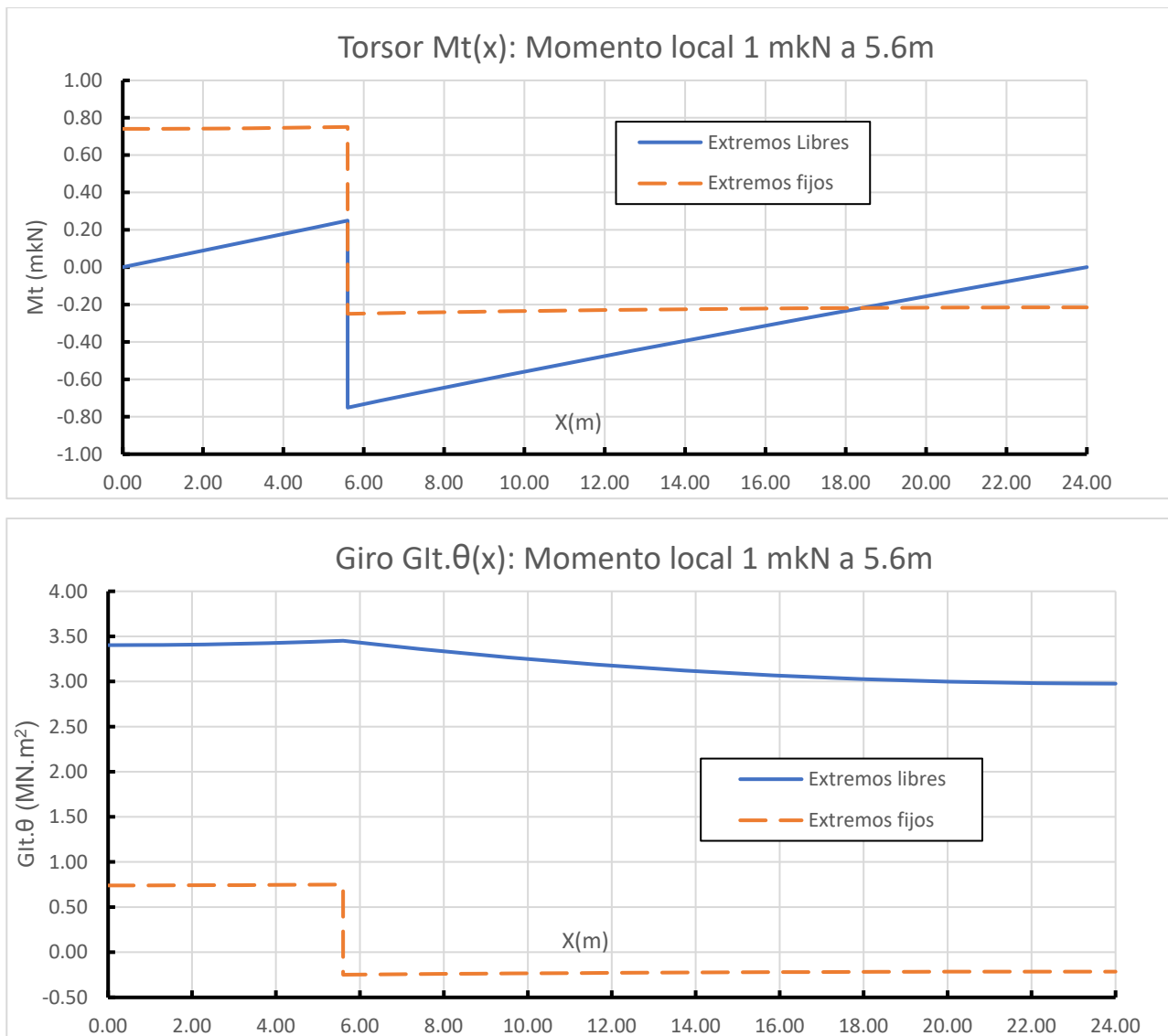


Figura 26: Diagramas de momentos y giros de torsión con momento local simétrico

Otra vez se ve la efectividad de disponer apoyos fijos, en especial en la limitación del trabajo de flexión transversal de la losa, que se liga al giro de eje viga, reduciéndose en un factor superior a 3. La contrapartida es un mayor esfuerzo de torsión en la parte de viga más próxima al apoyo fijo.

Analizando los resultados para el caso de momento simétrico repartido observamos que, si los extremos son fijos y la sección de viga posee la rigidez a torsión habitual en vigas artesa, el torsor de viga es casi igual al isostático, al cual se puede asimilar sin error apreciable, y en consecuencia la flexión de losa es muy reducida.

Lógicamente si los extremos son libres, la situación es completamente opuesta: el trabajo de flexión de losa absorbe el momento y la torsión de viga es nula. Esta apreciación posee importantes consecuencias prácticas, al requerir la losa un desempeño fundamental: el máximo giro de eje viga en el centro de vano es 15 veces mayor que en el caso anterior, con una demanda muy fuerte de rotación transversal de apoyos.

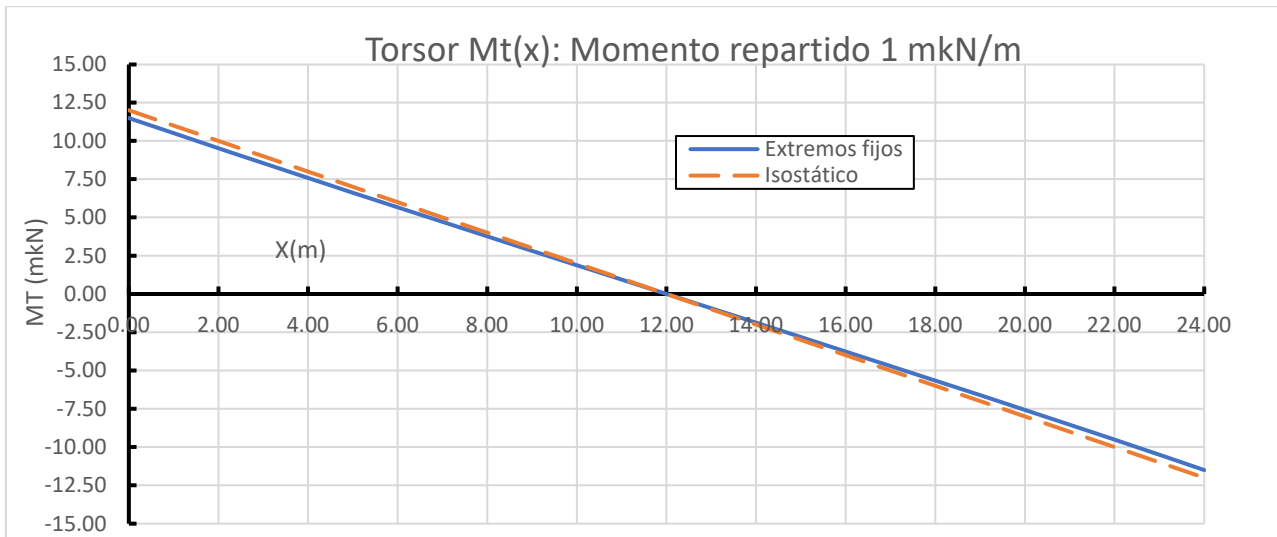


Figura 27: Diferencia de torsión para extremos fijos respecto al caso isostático con momento repartido

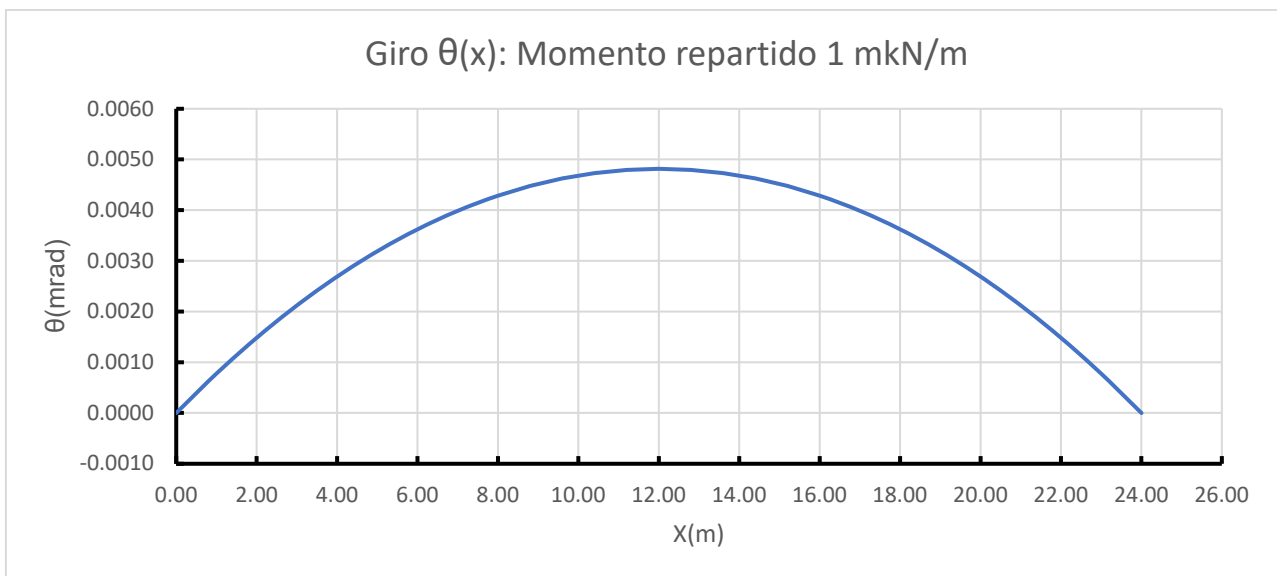


Figura 28: Giro de torsión del caso anterior

7.- DESARROLLO DE UN CASO REAL

Se presenta a continuación el cálculo de un tablero de puente ferroviario de 24 m de luz compuesto por dos vigas en artesa separadas 5.50 m de 1.70 m de canto y losa de reparto de 0.25 m de espesor. Soporta una plataforma ferroviaria de doble vía de línea convencional con un intereje de vía 4.20 m. El caso estudiado corresponde al comportamiento del tablero solicitado con sobrecarga UIC71 aplicada en una única vía. Se indican a continuación las dimensiones de la sección transversal y las cargas de tráfico afectadas por los factores dinámicos y clasificación de línea ($\Phi 3$ y α). Asimismo, se ha considerado que la acción es repartida transversalmente bajo traviesa en un ancho de 2.80 m.

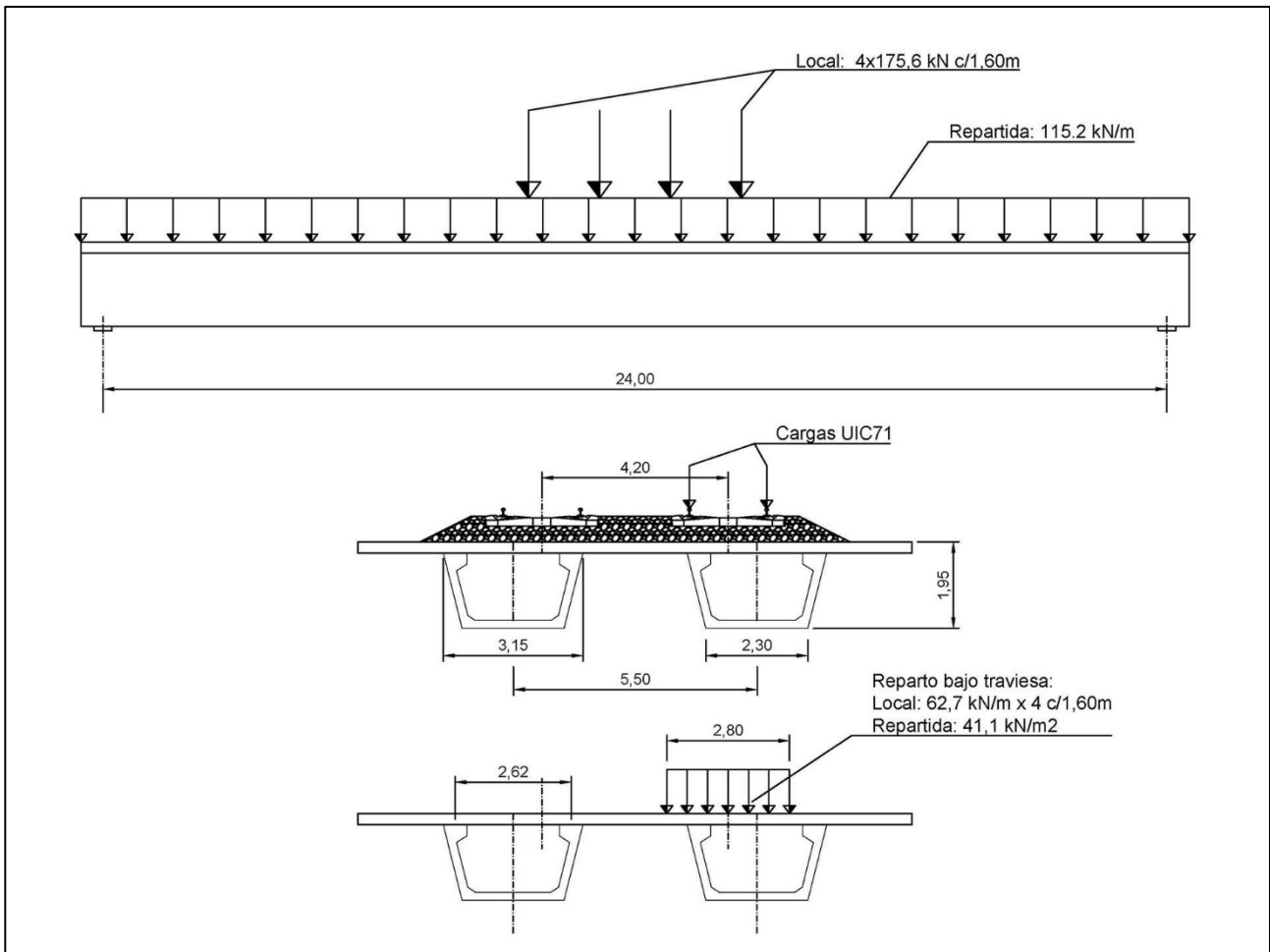


Figura 29: Esquema de cargas ferroviarias aplicadas en un única viga

El proceso de análisis, parte de establecimiento de los factores de influencia de la acción sobre el tablero; suponiendo un carga de 1 kN/m transversal se obtienen las reacciones en ejes de almas (R_{1i} , R_{1d} , R_{2i} , R_{2d}); se componen las resultantes en eje de vigas (P_1 , M_1 , P_2 , M_2), y la descomposición en los cuatro de carga aplicados en ejes de vigas: Carga vertical simétrica (q_{sim}), Carga vertical anti simétrica (q_{ant}), Momento simétrico (m_{sim}), y Momento anti simétrico (m_{ant}). En el siguiente esquema se presenta la descomposición, y los factores de influencia a aplicar en cada caso (los signos se consideran + en ejes globales, es decir verticales + hacia arriba y momento + en sentido de avance de eje tablero):

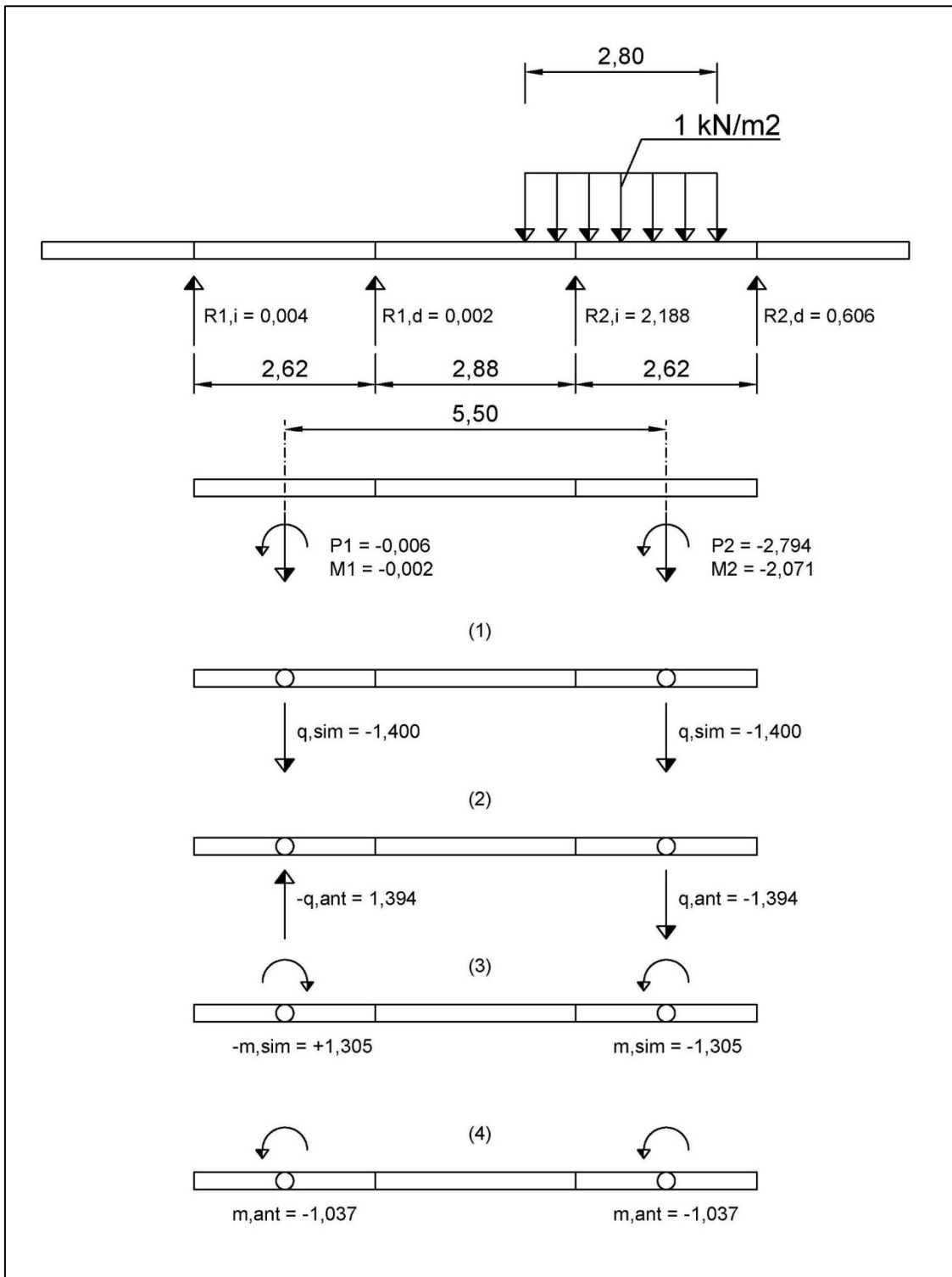


Figura 30: Esquema de coeficientes de influencia por viga y descomposición en los cuatro estados

El resto del proceso consiste tan solo en la aplicación de los coeficientes de influencia a las cargas de tráfico reales, y la superposición de los cuatro estados. En relación a la obtención de las sollicitaciones transversales de la losa, el camino más sencillo es obtener los esfuerzos de distorsión del tablero, inducidos por los giros y los movimientos verticales de cada viga obtenidos por superposición. Lógicamente a estos esfuerzos globales hay que añadir los esfuerzos locales de aplicación de la carga de tráfico sobre apoyos fijos de sección transversal.

Los parámetros considerados que determinan el comportamiento del tablero, son en este caso los siguientes:

- Rigidez a flexión (EI) por viga: 39548 MNm²
- Rigidez a torsión (GI,t) por viga: 30742 MNm²
- Factor rigidez vertical losa (K_{uu}) = 6.33 MN/m²
- Factor rigidez cruzada (K_{uθ}) = 17.39 MN/m
- Factor de rigidez al giro (K_{θθ}) = 55.51 MN
- Factor K1 = K_{uθ} x S / GI,t = 0.00311 1/m²
- Factor K2 = 2.K_{uu} / EI = 0.00032 1/m⁴

7.1.- RESULTADOS COMPARATIVOS ENTRE SISTEMAS DE APOYO

Se presentan los resultados de solicitaciones y deformaciones máximas en ambas vigas, con acciones repartidas y locales, para las dos configuraciones de apoyo -extremos fijos y libres a torsión-, siendo muy útil observar la contribución de las cuatro componentes de la descomposición:

Viga Derecha: Carga Repartida Extremos Fijos	My (mkN)	Q (kN)	m,l (kN)	Mx (mkN)	θ (mr)	U (mm)
Carga simétrica (1)	4145.8	-691.0	0.0	0.0	0.00	-6.3
Carga antisimétrica (2)	2086.2	-419.6	95.5	738.0	0.18	-3.2
Momento simétrico (3)	0.0	0.0	5.0	-470.5	-0.09	0.0
Momento antisimétrico (4)	-91.4	12.5	4.0	-477.4	-0.09	0.1
Total >>>>	6140.6	-1098.1	104.5	-210.0	0.00	-9.4
Viga Derecha: Carga Repartida Extremos Libres						
Carga simétrica (1)	4145.8	-691.0	0.0	0.0	0.00	-6.3
Carga antisimétrica (2)	3342.2	-688.0	61.6	276.1	1.25	-5.2
Momento simétrico (3)	0.0	0.0	42.6	0.0	-0.07	0.0
Momento antisimétrico (4)	-903.9	186.1	26.0	-74.7	-0.78	1.4
Total >>>>	6584.1	-1192.9	130.1	201.4	0.40	-10.1

Tabla 1: Resultados en la viga derecha (la más próxima a la vía cargada) para la componente de carga repartida

Viga Izquierda: Carga Repartida Extremos Fijos	My (mkN)	Q (kN)	m,l (kN)	Mx (mkN)	θ (mr)	U (mm)
Carga simétrica (1)	4145.8	-691.0	0.0	0.0	0.00	-6.3
Carga antisimétrica (2)	-2086.2	419.6	-95.5	738.0	0.18	3.2
Momento simétrico (3)	0.0	0.0	5.0	470.5	0.09	0.0
Momento antisimétrico (4)	91.4	-12.5	-4.0	-477.4	-0.09	-0.1
Total >>>>	2150.9	-283.8	-94.5	731.1	0.18	-3.2
Viga Izquierda: Carga Repartida Extremos Libres						
Carga simétrica (1)	4145.8	-691.0	0.0	0.0	0.00	-6.3
Carga antisimétrica (2)	-3342.2	688.0	-61.6	276.1	1.25	5.2
Momento simétrico (3)	0.0	0.0	42.6	0.0	0.07	0.0
Momento antisimétrico (4)	903.9	-186.1	-26.0	-74.7	-0.78	-1.4
Total >>>>	1707.5	-189.0	-45.0	201.4	0.53	-2.5

Tabla 2 Resultados en la viga izquierda (la más alejada de la vía cargada) para la componente de carga repartida .

Viga Derecha: Carro Extremos Fijos	My (mkN)	Q (kN)	m,l (kN)	Mx (mkN)	θ (mr)	U (mm)
Carga simétrica (1)	1826.4	-175.6	0.0	0.0	0.00	-2.5
Carga antisimétrica (2)	1022.9	-71.7	38.3	283.7	0.07	-1.3
Momento simétrico (3)	0.0	0.0	2.2	-114.9	-0.04	0.0
Momento antisimétrico (4)	-36.6	4.4	2.1	-117.9	-0.04	0.1
Total >>>>	2812.8	-242.9	42.5	50.9	-0.01	-3.7
Viga Derecha: Carro Extremos Libres						
Carga simétrica (1)	1826.4	-175.6	0.0	0.0	0.00	-2.5
Carga antisimétrica (2)	1505.8	-174.9	-25.2	109.3	0.48	-2.1
Momento simétrico (3)	0.0	0.0	12.0	-48.4	-0.22	0.0
Momento antisimétrico (4)	-237.3	47.3	7.5	-68.6	-0.21	0.4
Total >>>>	3095.0	-303.2	-5.7	-7.7	0.05	-4.2

Tabla 3: Resultados en la viga derecha (la más próxima a la vía cargada) para la componente de 4 cargas locales

Viga Izquierda: Carro Extremos Fijos	My (mkN)	Q (kN)	m,l (kN)	Mx (mkN)	θ (mr)	U (mm)
Carga simétrica (1)	1826.4	-175.6	0.0	0.0	0.00	-2.5
Carga antisimétrica (2)	-1022.9	71.7	-38.3	283.7	0.07	1.3
Momento simétrico (3)	0.0	0.0	2.2	114.9	0.04	0.0
Momento antisimétrico (4)	36.6	-4.4	-2.1	-117.9	-0.04	-0.1
Total >>>>	840.1	-108.4	-38.1	280.7	0.07	-1.2
Viga Izquierda: Carro Extremos Libres						
Carga simétrica (1)	1826.4	-175.6	0.0	0.0	0.00	-2.5
Carga antisimétrica (2)	-1505.8	174.9	25.2	109.3	0.48	2.1
Momento simétrico (3)	0.0	0.0	12.0	48.4	0.22	0.0
Momento antisimétrico (4)	237.3	-47.3	-7.5	-68.6	-0.21	-0.4
Total >>>>	557.9	-48.0	29.8	89.0	0.49	-0.8

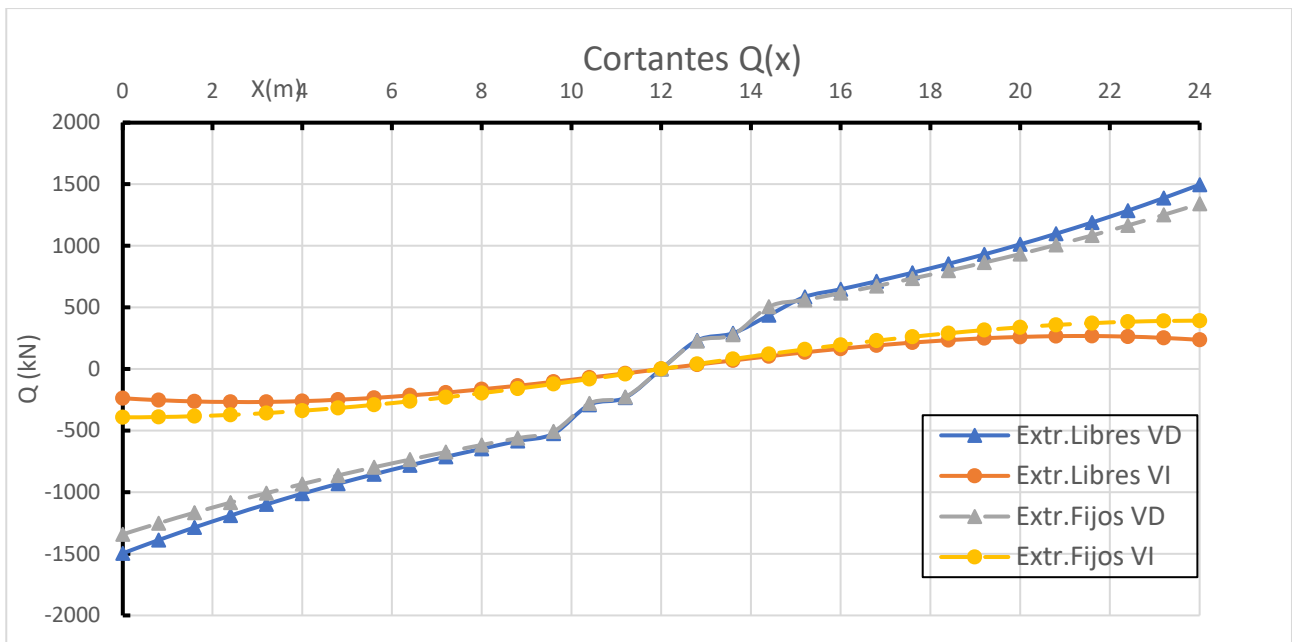
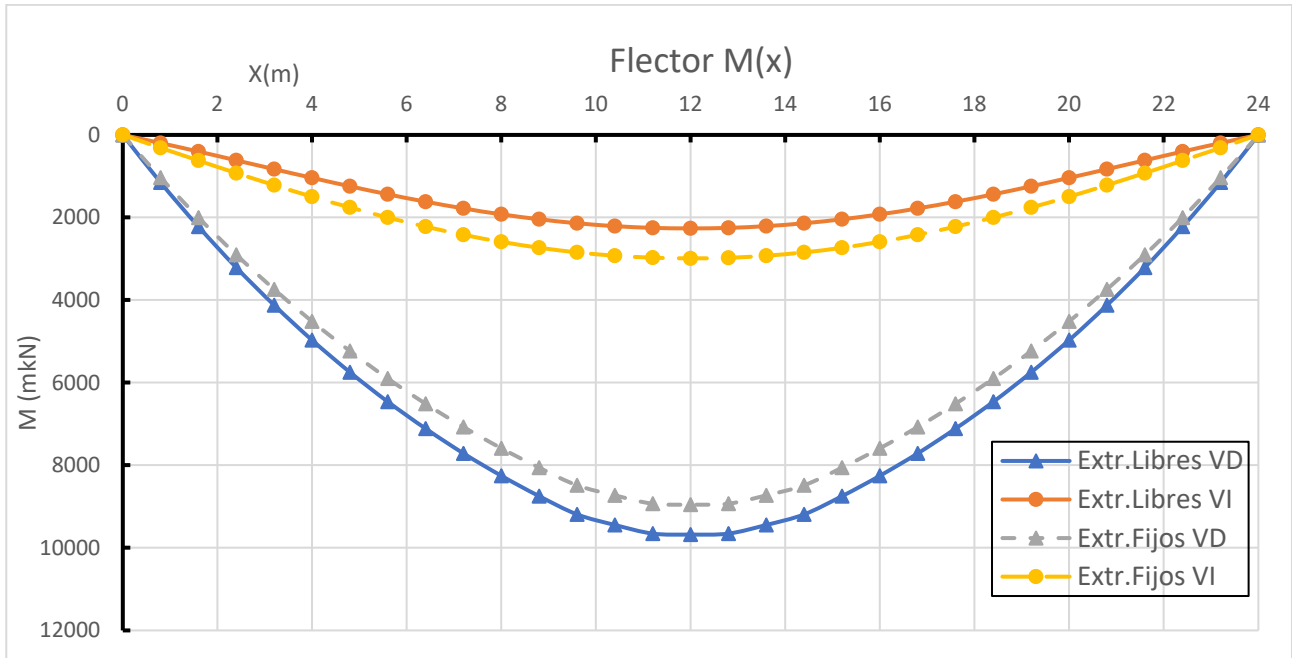
Tabla 4: Resultados en la viga izquierda (la más alejada de la vía cargada) para la componente de 4 cargas locales

Mencionamos a continuación algunas pautas generales:

- Los flectores y las deformaciones en el centro de vano y las reacciones en apoyo, están determinados en general por las componentes simétrica y antisimétrica de carga vertical, siendo muy reducida la contribución de la distribución de momentos antisimétricos, salvo en el caso de extremos libres. Para una estimación adecuada de los torsosres y de sus giros, no se puede prescindir de la consideración de los momentos antisimétricos.
- A pesar de tratarse de un tablero con una relación ancho luz relativamente pequeña, el reparto transversal es eficaz, como consecuencia de la elevada rigidez a torsión de las vigas. Lógicamente es más efectivo si se fijan los extremos: el 75% de flector y el 77% del cortante, frente a 81% y 86% respectivamente del caso de extremos libres, lo absorbe la viga más próxima a la vía cargada.
- A cambio, los torsosres aumentan considerablemente en el primer caso. Este efecto es determinante en el armado de la viga, aunque para la viga artesana la demanda adicional de armado no es relevante.
- Dada la poca excentricidad de la acción de la viga cargada respecto al eje de viga, en ambos casos la torsión de la viga opuesta es muy superior a la correspondiente a la viga más próxima. Este efecto puede ser importante en el diseño de los aparatos de apoyo.

- Las deformaciones diferenciales entre vigas son mucho mayores en el caso de extremos libres (33% frente a un 22% de relación de flecha máxima entre ellas respectivamente). Este hecho puede ser determinante en la validación del estado de servicio por alabeo de vía.

A continuación se representan los gráficos, con los resultados en ambas vigas y forma de apoyo, incluyendo todas las sobrecargas



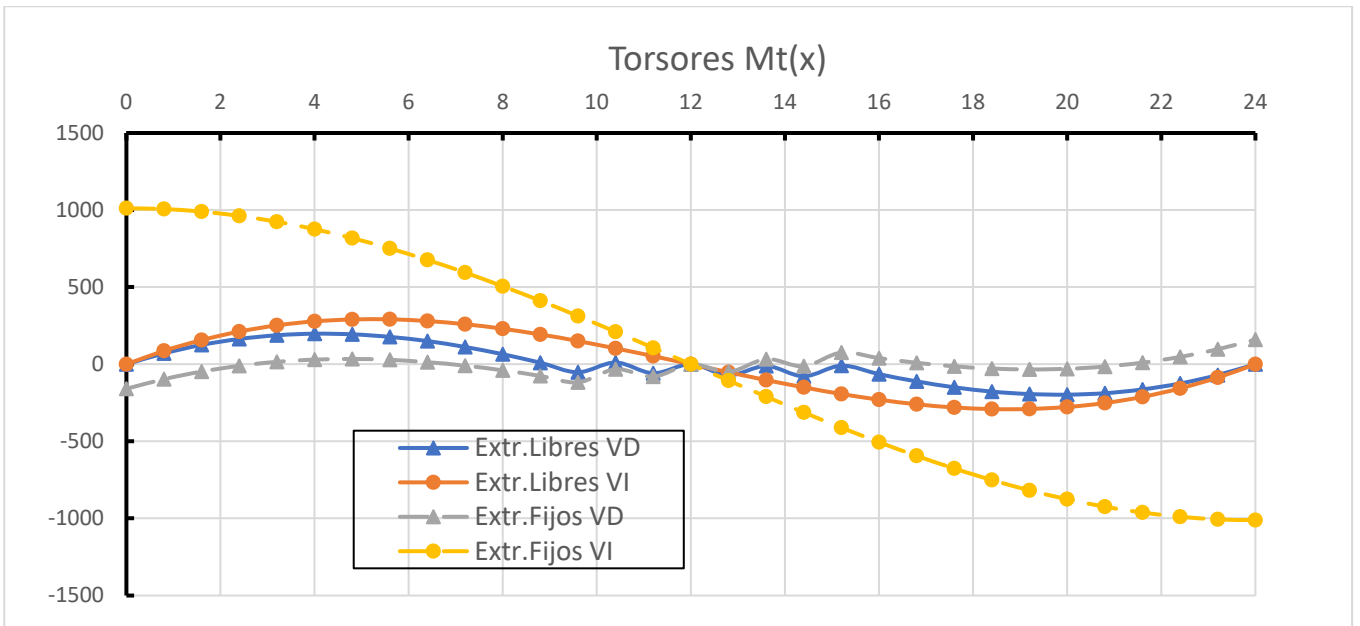


Figura 31: Solicitaciones en ambas vigas con apoyos libres y fijos a torsión

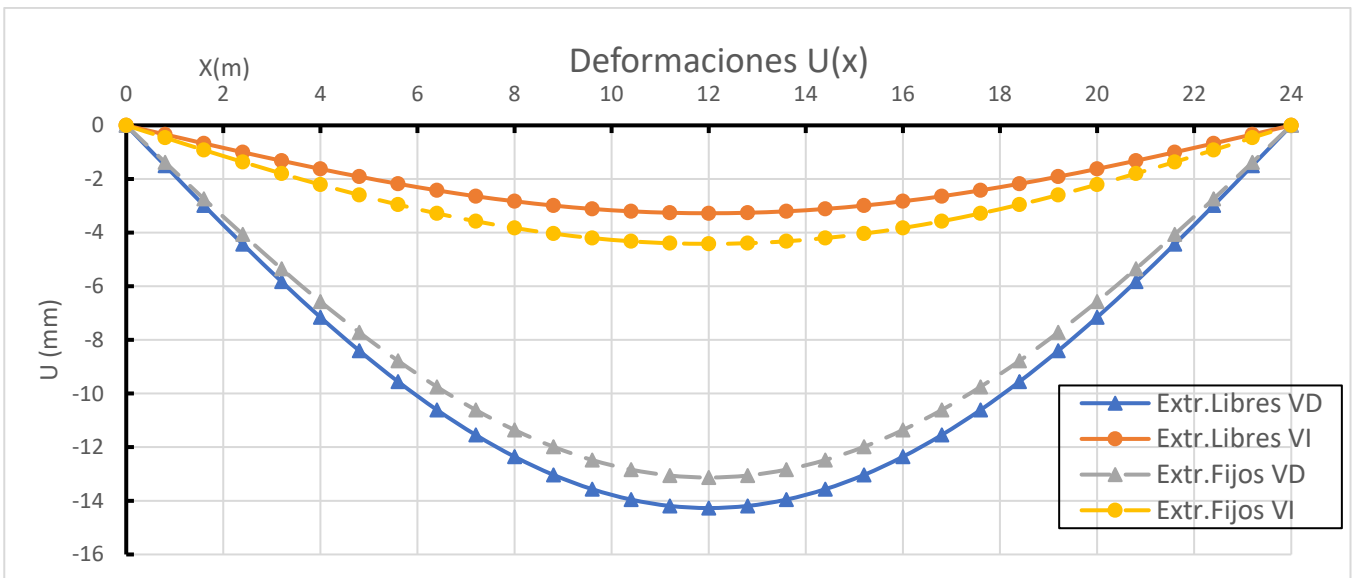


Figura 32: Deformaciones en ambas vigas con apoyos libres y fijos a torsión

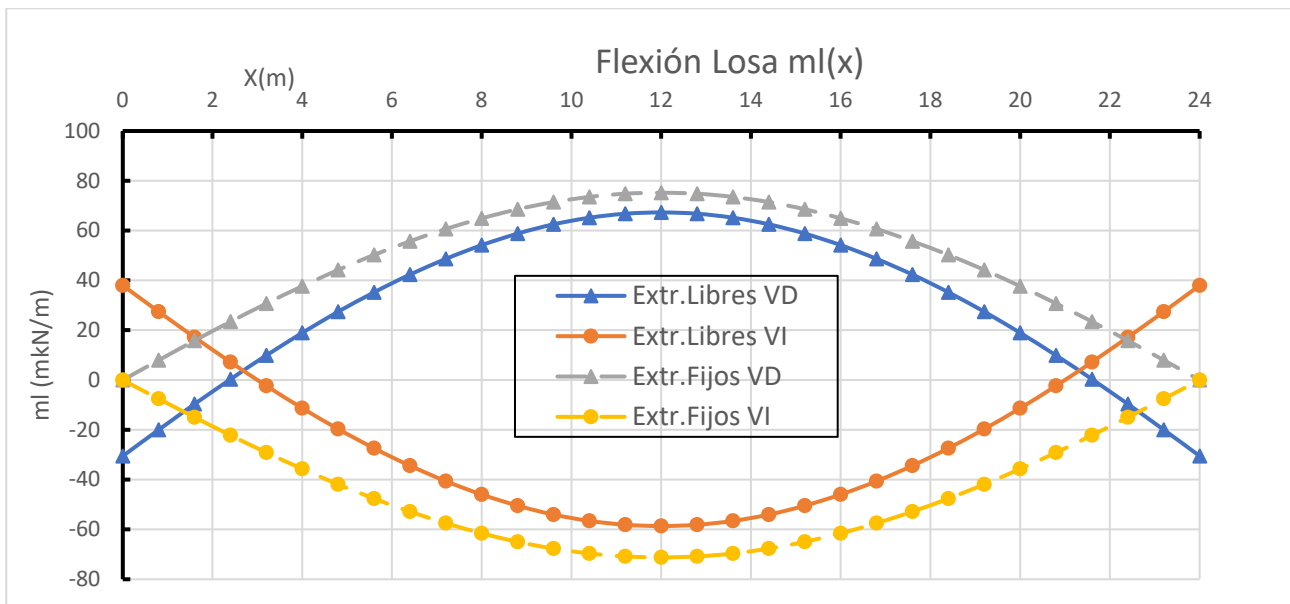


Figura 33: Flexión transversal de losa en bordes de alas de vigas en ambas condiciones de apoyo.

8.- CONCLUSIONES

Se ha presentado la solución analítica de deformaciones y solicitaciones de tableros formados por dos vigas principales y losa de reparto entre ellas, que permite resolver de forma directa el cálculo de este tipo de tableros. Se basa en la descomposición en cuatro estados, con obtención de la ecuación diferencial para la solución de los dos antisimétricos. Las fórmulas pueden incorporarse a un marco de Hoja de Cálculo, para la obtención de resultados para cualquier tipo de carga, y con mucha facilidad para cargas móviles. Aquí se limita al caso habitual de vigas paralelas apoyadas y sin oblicuidad de apoyos. La extensión a tableros continuos es simple, ya que la descomposición descrita sigue vigente, y solo deben modificarse las condiciones de contorno en términos de momentos hiperestáticos de continuidad que pueden ser obtenidos por compatibilidad de giros. Una mejora consiste en la consideración de la rigidez a torsión de la losa de reparto, induciendo el acoplamiento entre ella y la flexión longitudinal, desarrollando en consecuencia un planteamiento más complejo. Esto, junto un cambio de ejes de referencia, abre la posibilidad del análisis de tableros oblicuos.

APÉNDICE 1: Nomenclatura de símbolos utilizados

Resultantes y descomposición en estados

$q_{sim-ant}$: Valor en kN/m de la carga vertical en componente simétrica y antisimétrica.

$m_{sim-ant}$: Valor en mkN/m de la componente simétrica y antisimétrica del momento de la carga exterior

p_{1i}, p_{1d} = Carga vertical exterior en viga 1, en alma izquierda y derecha (kN/m)

p_{2i}, p_{2d} = Lo mismo en viga 2

P_{v1}, M_{v1} = Resultantes de carga vertical y momento aplicada en viga 1 ($kN/m-mkN/m$)

P_{v2}, M_{v2} = Lo mismo en viga 2

Acciones y solicitaciones en vigas

$p(x)$:	Función de descarga por reparto transversal (kN/m)
$q(x)$:	Ley de carga vertical externa aplicada (kN/m)
$Q(x)$:	Carga local o puntual en coordenada x (kN)
$mt(x)$:	Momento torsor repartido igual al flector transmitido por losa (mkN/m)
$M(x)$:	Ley de flectores en la viga (mkN)
$V(x)$:	Ley de cortantes en la viga (kN)
$Mt(x)$:	Ley de torsores en la viga (mkN/m)

Deformaciones en vigas

$u(x)$:	Deformación vertical (m)
$w(x)$:	Giro de flexión de viga alrededor eje Y (rad)
$\theta(x)$:	Giro de torsión de viga (rad)

Geometría y rigideces

S :	Distancia entre ejes de vigas (m)
B :	Distancias entre almas de apoyo de losa (m)
EI_y :	Rigidez a flexión neta del conjunto viga - ancho eficaz losa (kNm ²)
GI_t :	Rigidez a torsión del conjunto viga - losa (kNm ²)
K_{uu} =	Factor rigidez vertical losa. Para espesor constante: $12/EI_{losa} / S^3$
$K_{u\theta}$ =	Factor rigidez cruzada. Para espesor constante: $6EI / S^2$
$K_{\theta\theta}$ =	Factor rigidez al giro. Para espesor constante: $2EI / S$

Criterios de signos

X - Y - Z: Triedro directo global con eje X el de viga e Y vertical

Deformaciones y giros +, los correspondientes a avance de ejes globales.

Solicitaciones +: En la cara frontal de sección, las correspondientes a avance en ejes globales.

APENDICE 2: Funciones derivadas y primitivas que intervienen en la solución

Siendo la función con coeficientes de integración A_i , e incluyendo abreviaciones de las funciones trigonométricas:

$$f(x) = A1 \cdot \text{Cosh}(ux) \cdot \text{Cos}(vx) + A2 \cdot \text{Cosh}(ux) \cdot \text{Sen}(vy) + A3 \cdot \text{Senh}(ux) \cdot \text{Cos}(vx) + A4 \cdot \text{Senh}(ux) \cdot \text{Sen}(vx)$$

Las tres primeras funciones derivadas son:

$$f'(x) = A1 \cdot [u \cdot \text{Sh}(ux) \cdot C(vx) - v \cdot \text{Ch}(ux) \cdot S(vx)] + A2 \cdot [u \cdot \text{Sh}(ux) \cdot S(vy) + v \cdot \text{Ch}(ux) \cdot C(vx)] \\ + A3 \cdot [u \cdot \text{Ch}(ux) \cdot C(vx) - v \cdot \text{Sh}(ux) \cdot S(vx)] + A4 \\ \cdot [u \cdot \text{Ch}(ux) \cdot S(vx) + v \cdot \text{Sh}(ux) \cdot C(vx)]$$

$$f''(x) = A1 \cdot [r \cdot \text{Ch}(ux) \cdot C(vx) - 2s \cdot \text{Sh}(ux) \cdot S(vx)] + A2 \cdot [r \cdot \text{Ch}(ux) \cdot S(vy) + 2s \cdot \text{Sh}(ux) \cdot C(vx)] \\ + A3 \cdot [r \cdot \text{Sh}(ux) \cdot C(vx) - 2s \cdot \text{Ch}(ux) \cdot S(vx)] + A4 \\ \cdot [r \cdot \text{Sh}(ux) \cdot S(vx) + 2s \cdot \text{Ch}(ux) \cdot C(vx)]$$

$$f'''(x) = A1 \cdot [\alpha \cdot \text{Sh}(ux) \cdot C(vx) - \beta \cdot \text{Ch}(ux) \cdot S(vx)] + A2 \cdot [\alpha \cdot \text{Sh}(ux) \cdot S(vy) + \beta \cdot \text{Ch}(ux) \cdot C(vx)] \\ + A3 \cdot [\alpha \cdot \text{Ch}(ux) \cdot C(vx) - \beta \cdot \text{Sh}(ux) \cdot S(vx)] + A4 \\ \cdot [\alpha \cdot \text{Ch}(ux) \cdot S(vx) + \beta \cdot \text{Sh}(ux) \cdot C(vx)]$$

Y las dos primeras funciones primitivas:

$$F(x) = \{A1 \cdot [u \cdot \text{Sh}(ux) \cdot C(vx) + v \cdot \text{Ch}(ux) \cdot S(vx)] + A2 \cdot [u \cdot \text{Sh}(ux) \cdot S(vy) - v \cdot \text{Ch}(ux) \cdot C(vx)] \\ + A3 \cdot [u \cdot \text{Ch}(ux) \cdot C(vx) + v \cdot \text{Sh}(ux) \cdot S(vx)] + A4 \\ \cdot [u \cdot \text{Ch}(ux) \cdot S(vx) - v \cdot \text{Sh}(ux) \cdot C(vx)]\} \cdot \frac{1}{u^2 + v^2}$$

$$F^2(x) = \{A1 \cdot [r \cdot \text{Ch}(ux) \cdot C(vx) + 2s \cdot \text{Sh}(ux) \cdot S(vx)] + A2 \cdot [r \cdot \text{Ch}(ux) \cdot S(vy) - 2s \cdot \text{Sh}(ux) \cdot C(vx)] \\ + A3 \cdot [r \cdot \text{Sh}(ux) \cdot C(vx) + 2s \cdot \text{Ch}(ux) \cdot S(vx)] + A4 \\ \cdot [r \cdot \text{Sh}(ux) \cdot S(vx) - 2s \cdot \text{Ch}(ux) \cdot C(vx)]\} \frac{1}{(u^2 + v^2)^2}$$

Siendo

$$r = u^2 - v^2 \quad s = u \cdot v \quad \alpha = u \cdot r - 2v \cdot s \quad \beta = v \cdot r + 2u \cdot s$$

REFERENCIAS

- [1] Manterola, J. (1976) "[La sección abierta y cerrada bajo sollicitación excéntrica](#)". Hormigón - Puentes II, A.F.C.E., Monografía n.º 15
- [2] Samartín, Avelino and Martínez González, Jesús (1974). [Reparto transversal de la sobrecarga en tableros de puentes](#). "Hormigón y Acero" (n. 113); pp. 11-37. ISSN 0439-5689.
- [3] Samartín Quiroga, Avelino (1983). "[Cálculo de estructuras de puentes de hormigón](#)". Editorial Rueda. ISBN 9788472070240
- [4] Salvador Monleón, Carlos Lázaro y Josep Casanova (2019). "[La sección abierta y cerrada bajo sollicitación excéntrica... en una viga curva. Un tributo a Javier Manterola](#)". "Hormigón y Acero" (n. 289); pp. 7-24. ISSN 0439-5689.
- [5] Salvador Monleón (2017) "[Teoría unificada de elementos estructurales esbeltos](#)". Editorial de la Universidad Politécnica de Valencia. ISBN: 978-84-9048-584-2
- [6] Sadri Hassani (2012). "[Mathematical Physics](#)". Chap.20: "Green's Functions in One Dimension" Springer. ISBN 978-3-319-01194-3